Untersuchungen über die Cissoide.

Mathematische Abhandlung

von

Friedrich Buchbinder,

nebst

dem Jahresbericht des Rectors.

Einladungsprogramm

der

Königlichen Landesschule Pforta.

Naumburg a/S.

Untersuchungen über die Cissoide.

Mathematische Abhandlung

von

Friedrich Buchbinder,
Professor in Pforta.

Nebst

dem Jahresbericht des Rectors.

Einladungsprogramm

zu der

am 22. Mai 1857 stattfindenden Stiftungsfeier

der

Königlichen Landesschule Pforta.

Naumburg a/S.

Druck von Heinrich Sieling.

VORWORT.

Bei einer der regelmässigen Repetitionen, wie ich sie in Prima aus dem auf die einzelnen Monate jedes Semesters vertheilten Gesammtgebiete der Elementar-Mathematik vorzunehmen seit Jahren gewohnt bin, kam es darauf an die verwandten Sätze und Aufgaben der Planimetrie und Stereometrie zusammenzustellen. Dies führte auch auf die enge Beziehung zwischen den beiden Problemen: ein Rechteck in ein Quadrat und ein rechtwinkliges Parallelepipedon in einen Würfel zu verwandeln, das eine gelöst durch eine geometrisch mittlere Proportionale, das andre durch zwei geometrisch mittlere Proportionalen zu zwei gegebenen Linien. Im weitern Verfolg der letzteren Aufgabe nahm ich Anlass wieder einmal die bekanntesten Auflösungen des delischen Problems, die uns Eutocius von den alten griechischen Mathematikern in seinem Commentar zu Archimedes Schrift über die Kugel und den Cylinder* aufbewahrt hat, genauer durchzusehen und fühlte mich namentlich durch die Lösung des Diokles** angezogen, welche sich auf die von ihm erfundene *Cissoide* stützt; und so nahm ich mir vor an eine früher begonnene Arbeit wieder anknüpfend die Eigenschaften dieser krummen Linie im Zusammenhang zu untersuchen, besonders auch mit Berücksichtigung ihrer Brauchbarkeit für den Schulunterricht. Dadurch entstand die nachfolgende Abhandlung, in welcher ich zuerst die elementar-geometrischen Eigenschaften der Cissoide etwa in der Weise behandelt habe, wie sie den Stoff zu einer mathematischen Arbeit der Oberprimaner hiesiger Anstalt bildeten; dann folgen analytisch-geometrische Untersuchungen über die Cissoide, ihre Evolute und Evolvente, sowie über die Bahn eines auf der Cissoide rollenden Kreises, wobei ich mich freilich zuletzt auf Bestimmung einzelner Puncte beschränken musste, da die Natur der Curve und namentlich ihre Rectification auf Differentialgleichungen höheren Grades führte; den Schluss bilden historische Notizen über die Cissoide und ihren Entdecker.

Selbstverständlich habe ich bei dieser Arbeit das vorhandene Material benutzt und hebe unter den dahingehörigen Schriften schon hier hervor: die Abhandlung im Programme des Gymnasiums

* Eutocii Ascalonitae comment. in Archimedis libros de sphaera et cylindro. Basil. 1544. pg. 12 ff.

** Ebendas. pg. 15.

zu Saarbrücken 1842 und die Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie von Magnus, Berlin 1833.

Namentlich das letztere treffliche Werk bildet vielfältig die Grundlage, wenn es galt die allgemeinen Principien und Behandlungsweisen der analytischen Geometrie auf die Cissoide anzuwenden.

Und so empfehle ich diese Arbeit den geehrten Fachgenossen zur geneigten Beurtheilung als einen Versuch bei einer vorzugsweise der Schulmathematik zugewandten Thätigkeit, der höhern Mathematik doch nicht ganz fremd zu werden und daneben auch sie für das engere Gebiet nutzbar zu machen.

I.

§. 1. Lehrsatz. *Wenn man im einen Endpuncte eines Kreisdurchmessers ein Loth errichtet, zieht dann vom andern Endpuncte (Anfangspuncte) beliebige Gerade nach diesem Lothe und trägt auf jeder derselben ihr ausserhalb des Kreises liegendes Segment vom Anfangspuncte aus ab, fällt endlich von den so erhaltenen Puncten Lothe auf den Durchmesser, so ist der Würfel aus dem Segmente zwischen dem Anfangspuncte des Durchmessers und dem Fusspuncte eines solchen Lothes als Kante gleich dem Parallelepipedon, dessen Höhe das andre Segment des Durchmessers und dessen Grundfläche das Quadrat über dem Lothe ist.*

Fig. 1. Es sei AB ein Kreisdurchmesser, EE' sei senkrecht auf AB in B, von A seien beliebige Gerade AC, AD, AE,... AC', AD', AE'... gezogen und AF = KC, AG = DG, AH = EL,... AF' = C'K'... gemacht, ferner FP ⊥ AB, so soll

$$AP^3 = FP^2 . BP \text{ sein,}$$

oder wenn wir AB = a, irgend ein Loth FP = y und entsprechend AP = x, also BP = a—x setzen, soll allgemein

$$x^3 = y^2(a-x) \text{ sein.}$$

Zunächst ist $CB^2 = CK . CA = FA . CA = \sqrt{AP^2+FP^2} . \sqrt{AB^2+CB^2}$;

da aber $AB : AP = CB : FP$, so wird $CB = \frac{AB . FP}{AP}$, folglich

$$\frac{AB^2 . FP^2}{AP^2} = \sqrt{AP^2+FP^2} . \sqrt{AB^2+\frac{AB^2 . FP^2}{AP^2}} = \frac{AB}{AP}\sqrt{AP^2+FP^2} . \sqrt{AP^2+FP^2} = \frac{AB}{AP}(AP^2+FP^2),$$

$$\text{oder } \frac{AB . FP^2}{AP} = AP^2+FP^2,$$

$$AB . FP^2 = AP^3 + AP . FP^2,$$

$$(AB - AP) FP^2 = AP^3 = BP . FP^2$$

Was nun aber eben für den Punct F bewiesen ist, gilt für jeden andern Punct derselben Art ebenso, weshalb sich die allgemeine Gleichung als richtig ergiebt

$$x^3 = y^2 (a-x).$$

Zieht man noch KN $\perp$ AB, KM und FO $\perp$ BE und KB, so erhält man die Richtigkeit des Satzes auch auf folgendem Wege.

$$\triangle AFP \cong CKM, \text{ folglich } AP = KM \text{ und } FP = CM.$$

Ebenso ist $\triangle$ AKN $\cong$ CFO (AK = CF und die Winkel gleich), folglich

$$AN = FO \text{ und } KN = CO; \text{ ferner folgt aus der Congruenz}$$

$$\triangle ABC - AFP - CFO = \triangle ABC - CKM - AKN, \text{ d. h.}$$

$$FPBO = KNBM \text{ oder } FP.\,BP = KN.\,BN \text{ oder } FP.\,BP = KN.\,AP, \text{ also auch}$$

$$FP^2.\,BP = FP.\,KN.\,AP.$$

Im rechtwinkligen Dreieck CKB aber ist

$$KM^2 = CM.\,BM, \text{ oder } AP^2 = FP.\,KN, \text{ d. h.}$$

$$FP^2.\,BP = AP^3$$

Eine dritte Ableitung des Satzes ist folgende:

$$\triangle AFP \cong CKM, \text{ folgl. } AP = KM \text{ und } AN = AB - AP,$$

$$\text{ferner } KN^2 = AN.\,BN = AN.\,AP \text{ und da}$$

$$AP : FP = AN : KN, \text{ so wird}$$

$$KN^2 = \frac{AN^2.\,FP^2}{AP^2}, \text{ also}$$

$$AN.\,AP = \frac{AN^2.\,FP^2}{AP^2}, \text{ oder}$$

$$AP^3 = AN.\,FP^2 \text{ und da } AN = BP, \text{ so wird}$$

$$AP^3 = FP^2.\,BP.$$

§. 2. Erklärung und Zusätze. *Verbindet man die Puncte A, F, G, H... durch eine krumme Linie, ebenso A, F', G', H'..., so erhält man den geometrischen Ort für diejenigen Puncte der Kreisebene, welche der im Hauptsatze angegebenen Bedingung Genüge leisten. Diese krumme Linie heisst Cissoide.* Fig. 1.

Den Punct A nennt man die Spitze, den Durchmesser AB die Axe, jede Gerade von der Spitze nach irgend einem Puncte der Cissoide einen Vector, jede von der Spitze nach EE' gezogene Gerade eine Secante und den Kreis um AB den Grund- oder Erzeugungskreis.

Zunächst ergiebt sich aus dem Obigen, dass die Cissoide zwei auf verschiedenen Seiten der Axe liegende und von der Spitze ausgehende Aeste hat, da es ganz gleichgiltig ist, ob wir die oben ausgeführten Untersuchungen für Puncte ober- oder unterhalb der Axe anstellen.

Setzen wir AB = a, den Winkel, welchen eine Secante mit der Axe bildet, = φ, so lässt sich jedes äussere Segment einer Secante, also auch der zugehörige Vector durch a und φ bestimmen.

Nehmen wir die Secante AC, so ist $\angle CAB = \varphi$, also

$$KB = a \sin \varphi,$$

$$v = CK = AF = KB \operatorname{tg} KBC = KB \operatorname{tg} \varphi = \frac{a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} = \frac{a(1-\cos^2 \varphi)}{\cos \varphi}$$

Mit wachsendem φ wird $\cos\varphi$ kleiner, also nimmt der Dividend zu, der Divisor ab, d. h. der Vector v wird grösser mit wachsendem φ

Für $\varphi = 0^0$ wird $v = 0$

" $\varphi = 90^0$ " $v = \infty$,

im ersten Falle ist der Vector $= 0$, d. h. der zugehörige Punct der Cissoide fällt mit der Spitze zusammen, im zweiten Falle ist der Vector AT $\|$ EE′ und der zugehörige Punct der Cissoide liegt in unendlicher Entfernung; demnach erstrecken sich die Zweige der Cissoide von der Spitze bis ins Unendliche. Da ferner jeder Vector kleiner als die zugehörige Secante ist, so liegen alle Puncte der Cissoide zwischen den beiden parallelen Geraden EE′ und TT′, welche in den Endpuncten der Axe senkrecht auf ihr stehen.

Es ist nun $FO = FC \cos \varphi = AK \cos \varphi = a \cos^2 \varphi$,

d. h. der Abstand eines Punctes der Cissoide von EE′ ist $= a \cos^2 \varphi$.

Mit wachsendem φ nimmt $a \cos^2 \varphi$ ab, für $\varphi = 90^0$ ist $FO = 0$,

d. h. je grösser φ, also auch der Vector wird, desto mehr nähern sich die Zweige der Cissoide dem Lothe EE′, bis beide in unendlicher Entfernung zusammentreffen, also ist EE′ eine Asymptote der Cissoide.

Wir fanden vorhin den Vector $v = \frac{a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$, die zugehörige Kreissehne aber ist

$$AK = s = a \cos \varphi,$$

für $\varphi < 45^0$ ist $\sin \varphi < \cos \varphi$, also auch

$$a \sin^2 \varphi < a \cos^2 \varphi, \quad \frac{a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} < \frac{a \cos^2 \varphi}{\cos \varphi},$$

d. h. $v < s$,

für $\varphi = 45$ ist $v = s$

für $\varphi > 45$ " $v > s$

Der Vector ist also $\lesseqgtr$ als die zugehörige Sehne des Grundkreises, je nachdem $\varphi \lesseqgtr 45^0$ ist. Da für $\varphi = 45^0$ $v = s$ wird, so halbiert jeder Zweig der Cissoide den mit ihr auf einer Seite der Axe liegenden Bogen des Grundkreises.

Fig. 1. **§. 3.** Verlängern wir PF bis zum Durchschnitt mit der Peripherie in J, so erhalten wir

$$FP^2 : JP^2 = \frac{AP^3}{BP} : AP.BP = AP^2 : BP^2, \text{ folgl.}$$

$$FP : JP = AP : BP,$$

so lange also $AP < BP$, so lange ist $FP < JP$, d. h. die Cissoide liegt innerhalb des Kreises; für $AP = BP$ wird $FP = JP$, d. h. die Cissoide schneidet die Peripherie des Kreises und zwar im Halbierungspuncte; wird endlich $AP > BP$, so wird auch $FP > JP$, d. h. die Cissoide liegt ausserhalb des Kreises.

Behalten x, y, φ, a die Bedeutung, welche sie im § 1 hatten, so ist $x \operatorname{tg} \varphi = y$, also

$$x^2 \operatorname{tg}^2 \varphi = y^2 = \frac{x^3}{a-x}, \text{ d. h. } \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{x}{a-x},$$

$$\text{also } \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{x}{a-x}},$$

der dazugehörige Vector aber ist

$$v = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{x^3}{a-x}} = \sqrt{\frac{a x^2}{a-x}} = x \sqrt{\frac{a}{a-x}}$$

Soll der Vector gleich der Axe sein, so hat man

$$a^2 = \frac{ax^2}{a-x}, \text{ oder } a^2 - a x = x^2,$$

$$x^2 + a x = a^2, \text{ also}$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2},$$

Das zugehörige x ist also das grössere Segment der nach äusserem und mittlerem Verhältniss getheilten Axe, denn

$$a : x = x : a - x \text{ giebt } x^2 = a^2 - a x \text{ wie oben.}$$

Theilt man also die Axe nach dem goldnen Schnitt, so dass der grössere Abschnitt an A liegt und zieht das zugehörige Loth, so trifft dasselbe den Punct der Cissoide, dessen Vector gleich der Axe ist.

Zur Bestimmung von φ für diesen Fall setzt man

$$a = \frac{a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}, \cos \varphi = \sin^2 \varphi, \cos \varphi = 1 - \cos^2 \varphi, \cos^2 \varphi + \cos \varphi = 1, \text{ also}$$

$$\cos \varphi = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \text{ da der — Werth der Quadratwurzel unbrauchbar ist,}$$

$$\cos \varphi = 0{,}618034^*, \ \lg \cos \varphi = 0{,}7910124,$$

$$\varphi = 51^0\ 49'\ 38'' \text{ oder } 308^0\ 10'\ 22''.$$

Nennt man die Gerade vom Endpuncte B der Axe nach einem Puncte F der Cissoide *Gegenvector* und bezeichnet sie mit v', so erhält man

$$v' = \sqrt{FP^2 + BP^2} = \sqrt{y^2 + (a-x)^2} = \sqrt{\frac{x^3}{a-x} + (a-x)^2} = \sqrt{\frac{x^3 + (a-x)^3}{a-x}} = \sqrt{\frac{a^3 - 3a^2 x + 3ax^2}{a-x}}.$$

---

* Dieser und allen folgenden Rechnungen liegen die Vega'schen Logarithmentafeln bearbeitet von Dr. Bremiker, Berlin 1856 zu Grunde.

Um x für den Fall zu bestimmen, dass $v' = a$ wird, hat man

$$a^2 = \frac{a^3 - 3a^2x + 3ax^2}{a-x}, \text{ oder } a^3 - a^2x = a^3 - 3a^2x + 3ax^2, \text{ woraus sich ergiebt}$$

$$ax\,(3x - 2a) = 0.$$

Dieser Gleichung wird genügt durch $x = o$, d. h. der Gegenvector fällt mit der Axe zusammen, und durch $x = \frac{2}{3}\,a$.

Auch hier kann man nach dem zugehörigen φ fragen und hat auszugehen von

$$v'^2 = a^2 = (a-x)^2 + y^2.$$

Nun ist aber $x = AP = KM = KB \sin\varphi = a \sin^2\varphi$, also

$$(a-x)^2 = (a - a\sin^2\varphi)^2 = a^2\cos^4\varphi; \text{ ferner}$$

$$y^2 = \frac{x^3}{a-x} = \frac{a^3\sin^6\varphi}{a\cos^2\varphi} = \frac{a^2\sin^6\varphi}{\cos^2\varphi}, \text{ folglich}$$

$$a^2 = a^2\cos^4\varphi + \frac{a^2\sin^6\varphi}{\cos^2\varphi},$$

$\cos^2\varphi = \cos^6\varphi + \sin^6\varphi = \cos^6\varphi + (1 - \cos^2\varphi)^3 = \cos^6\varphi + 1 - 3\cos^2\varphi + 3\cos^4\varphi - \cos^6\varphi$, d. h.

$3\cos^4\varphi - 4\cos^2\varphi = -1$, $\cos^4\varphi - \frac{4}{3}\cos^2\varphi = -\frac{1}{3}$, $\cos^2\varphi = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{3}} = \frac{2 \pm 1}{3} = 1 \text{ oder } \frac{1}{3}$.

Für $\cos^2\varphi = 1$ ist $\cos\varphi = 1$, also $\varphi = 0$ oder 360^0

für $\cos^2\varphi = \frac{1}{3}$ ist $\cos\varphi = 0{,}5773502$, $\lg\cos\varphi = 0{,}7614393 - 1$, $\varphi = 54^0\,44'\,8''$ oder $305^0\,15'\,52''$.

Fig. 2. **§. 4.** Zieht man eine Gerade DE parallel der Axe AB, so ist $DC = x$, $CE = a - x$, $CF = y$, also $DC^3 = CF^2.\,CE$, *die Cissoide theilt also jede Gerade, welche parallel der Axe gezogen wird, in zwei Segmente, so dass der Cubus aus dem einen nach dem Anfangspuncte A zu liegenden DC als Kante gleich einem Parallelepipedon wird, dessen Höhe das andre Segment und dessen Grundfläche das Quadrat über dem Abstande der Parallelen von der Axe ist.*

Dadurch lässt sich mit Hilfe der Cissoide ein gegebenes Parallelepipedon in einen Würfel verwandeln nnd ein gegebener Würfel verdoppeln.

Man verwandelt nämlich die Grundfläche des gegebenen Parallelepipedon in ein Quadrat, trägt auf der Asymptote einer Cissoide vom Durchschnittspunct mit der Axe BK gleich der Seite des Quadrates und auf der Axe ebenfalls von B aus BG = der Höhe des Parallelepipedon ab, zieht GH ∥ BK und KH ∥ BG, ferner die Diagonale BH bis C, fällt CF ⊥ AB, so ist die 4. Proportionale zu FB, GB, AF die Seite des verlangten Würfels.

Nennen wir diese 4. Proportionale z, so ist

$$\frac{GB.\,AF}{BF} = z,\; z^3 = \frac{GB^3.\,AF^3}{BF^3} = \frac{GB^3.\,CF^2.\,BF}{BF^3} = \frac{GB^3.\,CF^2}{BF^2},$$

$$\text{aber } \frac{CF^2}{BF^2} = \frac{HG^2}{BG^2}, \text{ folgl.}$$

$$z^3 = \frac{GB^3.\,HG^2}{GB^2} = GB.\,HG^2 = GB.\,KB^2$$

Soll man einen Cubus verdoppeln, so macht man BK = der Kante und BG = der doppelten Kante desselben und verfährt sonst wie oben.

§. 5. ***Fällt man von einem Puncte L der Cissoide LG senkrecht auf die Axe AB, so wird*** *Fig. 2.*

$$LG : AG = AG : MG = MG : GB$$

Setzt man nämlich LG = y, AG = x, MG = y′, GB = a — x, so ist

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^3}{a-x}},\ y' = \pm \sqrt{x(a-x)},$$

$$\frac{y}{x} = \pm \sqrt{\frac{x}{a-x}},\ \frac{x}{y'} = \pm \sqrt{\frac{x}{a-x}},\ \text{also}\ \frac{y}{x} = \frac{x}{y'},$$

$$\frac{y'}{a-x} = \pm \sqrt{\frac{x}{a-x}},\ \text{folgl.}$$

$$y : x = x : y' = y' : a-x \text{ oder}$$

$$LG : AG = AG : MG = MG : BG,$$

so dass man hierdurch zwischen LG und BG zwei geometrische mittlere Proportionalen erhält.

Derselbe Satz ergiebt sich noch einfacher aus Fig. 1., wo CM : KM = KM : MB oder

$$FP : AP = AP : JP \text{ und } AP : JP = JP : BP.$$

§. 6. ***Verbindet man einen von der Spitze verschiedenen Punct C der Cissoide mit den Endpuncten der Axe und verlängert diese Geraden nöthigenfalls bis zum Durchschnitt in N und P mit dem im Mittelpuncte des Kreises errichteten Lothe OJ und ist OQ geometrisches Mittel zwischen ON und OP, so wird:*** *Fig. 2.*

$$PO : QO = QO : NO = NO : JO$$

denn da AF : CF = AO : NO d. h. x : y = AO : NO, so ist

$$NO = \frac{y}{x} . AO = \frac{y}{x}\ \frac{a}{2} = \frac{ay}{2x},\ \text{ferner}$$

$$BF : CF = BO : PO,\ \text{also}\ PO = \frac{CF . BO}{BF} = \frac{y\frac{a}{2}}{a-x} = \frac{ay}{2(a-x)}$$

$$QO = \sqrt{PO . NO} = \sqrt{\frac{a^2y^2}{4x(a-x)}} = \frac{ay}{2\sqrt{x(a-x)}},\ \text{folgl.}$$

$$\frac{QO}{NO} = \frac{ay}{2\sqrt{x(a-x)}} : \frac{ay}{2x} = \sqrt{\frac{x}{a-x}}$$

$$\frac{NO}{JO} = \frac{ay}{2x} : \frac{a}{2} = \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{x}{a-x}},\ \text{folgl.}$$

$$PO : QO = QO : NO = NO : JO$$

Dasselbe gilt, wenn der angenommene Punct ausserhalb des Kreises liegt; fällt derselbe nach J, so fallen auch N, P, Q mit J zusammen, so dass auch hier der Satz noch richtig ist.

Soll man daher zu 2 gegebenen Linien zwei mittlere Proportionallinien finden, so construiert man folgendermassen:

Mit einer der beiden Geraden PO und JO (hier mit JO) als Radius beschreibe man einen Kreis und construiere die ihm als Erzeugungskreis zugehörige Cissoide. Im Mittelpuncte O ihrer Axe AB errichte man den senkrechten Radius JO, trage auf JO von O aus die zweite Gerade OP ab, ziehe BP bis zur Cissoide in C und AC bis zu JO in N, suche zu PO und NO das geometrische Mittel QO, so sind NO und QO die beiden gesuchten Linien, wie sich unmittelbar aus dem eben bewiesenen Satze ergiebt.

Die Aufgabe: zu zwei gegebenen Linien zwei geometrisch mittlere Proportionallinien zu finden fällt mit der zusammen: einen Würfel zu construieren, der ein Vielfaches eines gegebenen Würfels ist.

Hat man nämlich

$$a : b = b : c = c : d, \text{ so ist}$$

$$d\,b = c^2,\ d = \frac{c^2}{b},\ \text{aber}$$

$$c = \frac{b^2}{a},\ \text{also } d = \frac{b^4}{ab} = \frac{b^3}{a},\ \text{d. h.}$$

$$b^3 = a\,d.$$

Setzt man nun $d = m\,a$, wo m eine beliebige ganze oder gebrochne Zahl sein kann, so wird also

$$b^3 = m\,a^3,$$

d. h. b ist die Kante eines Würfels, der das m fache eines Würfels mit der Kante a ist.

Soll man also einen Würfel verdoppeln, dessen Kante a ist, so suche man zu a und 2 a in der eben angegebenen Weise zwei geometrisch mittlere Proportionalen, die erste derselben ist die Kante des gesuchten Würfels.

Fig. 2. **§. 7.** *Beschreibt man von irgend einem Puncte R der Cissoide mit dem Radius $\frac{a}{2}$ einen Kreis welcher den auf der Axe im Mittelpuncte errichteten senkrechten Durchmesser in U und T schneidet, zieht durch den entfernteren Durchschnittspunct T den Durchmesser TS und an S die Tangente SZ bis zum Durchschnitt mit der verlängerten Axe, so ist diese Verlängerung der Axe $AZ = \frac{a}{2}$*

Man ziehe noch SU, $RV \perp UT$; nennen wir nun ein von einem Puncte der Cissoide auf die Axe gefälltes Loth wie bisher y, das Segment der Axe vom Anfangspuncte A bis zum Fusspuncte des Lothes x, die Axe a,

$$\text{so ist } RV = x - \frac{a}{2},\ UT = 2\,VT = 2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} = 2\sqrt{ax - x^2} = 2\sqrt{x(a-x)}$$

$$SU = 2\,VR = 2x - a$$

$$\triangle\, WUS \sim UST,\ \text{folglich } WS : SU = ST : UT,\ \text{d. h.}$$

$$WS = \frac{SU.\,ST}{UT} = \frac{(2x-a)\,a}{2\sqrt{x(a-x)}};\ \text{ferner ist}$$

$$SU^2 = WU.TU, \text{ also } WU = \frac{SU^2}{TU} = \frac{(2x-a)^2}{2\sqrt{x(a-x)}}$$

$$OW = OV - WU - UV = OV - WU - VT$$

$$= y - \frac{(2x-a)^2}{2\sqrt{x(a-x)}} - \sqrt{x(a-x)}$$

$$= \sqrt{\frac{x^3}{a-x}} - \frac{(2x-a)^2}{2\sqrt{x(a-x)}} - \sqrt{x(a-x)}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}\sqrt{x^3} - (2x-a)^2 - 2\left(\sqrt{x(a-x)}\right)^2}{2\sqrt{x(a-x)}}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x^2 + 4ax - a^2 - 2ax + 2x^2}{2\sqrt{x(a-x)}}$$

$$= \frac{2ax - a^2}{2\sqrt{x(a-x)}} = \frac{a(2x-a)}{2\sqrt{x(a-x)}}, \text{ folgl.}$$

$$OW = SW, \text{ folgl.}$$

$$\triangle ZOW \cong SWT, \text{ also } ZO = ST, \text{ d. h.}$$

$$ZA = \frac{a}{2}$$

Ganz analog ist der Beweis, wenn der Punct R innerhalb des Grundkreises liegt.

Liegt derselbe auf der Peripherie des Grundkreises, so wird die Axe selbst Tangente, so dass auch hier der Satz richtig ist; ist endlich die Spitze A der Mittelpunct des Kreises, so berührt derselbe den senkrechten Durchmesser in O, der Punct Z ist also dann selbst Berührungspunct der Tangente, so dass die Richtigkeit des Satzes ohne weiteres einleuchtet.

Auf diesem Satze beruht die Methode, mittelst deren Newton* die Cissoide durch stetige Bewegung eines Punctes entstehen lässt.

Es sei AB = a die Axe, A die Spitze der zu construierenden Cissoide; man verlängere AB über A hinaus bis Z, so dass $AZ = \frac{a}{2}$, und errichte im Halbierungspuncte O von AB das Loth OT, nehme dann einen Winkelhaken TSZ, dessen einer Schenkel SZ unbegrenzt, der andre ST = a ist, lasse denselben mit dem Endpuncte T auf der Geraden OT fortrücken, während SZ immer durch Z geht, dann beschreibt der Halbierungspunct R des Schenkels ST eine Cissoide, welche A zur Spitze und AB zur Axe hat.

Zieht man nämlich RV und SU ⊥ OT, so ist

$$OZ : OW = SU : UW$$

$$OZ + SU : OW + UW \ (OU) = SU : UW = VT : VR, \text{ aber}$$

* Arithmetica universalis s. de compositione et resolutione arithmetica liber, Cantabrig. 1707 pg. 143.

$$SU = 2\,VR \text{ und } OU = OV - UV = OV - VT, \text{ so wird}$$
$$OZ + 2\,VR : OV - VT = VT : VR$$

Nehmen wir nun A als Anfangspunct der Cissoide und setzen AG des Punctes $R = x$, $RG = y$, so wird, da $OZ = a$ und

$$VR = x - \frac{a}{2}, \text{ also } VT = \sqrt{RT^2 - VR^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{x(a-x)},$$
$$a + 2\left(x - \frac{a}{2}\right) : y - \sqrt{x(a-x)} = \sqrt{x(a-x)} : x - \frac{a}{2}$$
$$2x\left(x - \frac{a}{2}\right) = \left\{y - \sqrt{x(a-x)}\right\}\sqrt{x(a-x)}$$
$$2x^2 - ax = y\sqrt{x(a-x)} - ax + x^2$$
$$\frac{x^2}{\sqrt{x(a-x)}} = y, \quad \frac{x^3}{a-x} = y^2$$

dieselben Beziehungen finden aber für den Punct R statt, welche Lage derselbe auch haben möge, die von ihm beschriebene Curve ist also eine Cissoide, deren Spitze A, deren Axe AB ist.

II.

§. 8. Die bisherigen Ergebnisse über die Cissoide und ihre Eigenschaften wurden auf elementar-geometrischem Wege abgeleitet, jetzt sollen nun die weitern Untersuchungen mit Hilfe der analytischen Geometrie angestellt werden.

Fig. 1. Als Coordinatensystem wählen wir zunächst das rechtwinklige, dessen Anfangspunct A, dessen positive Abscissen-Axe die mit der Cissoiden-Axe AB zusammenfallende Gerade AX und dessen positive Ordinaten-Axe AT sein mag, dann drückt die schon mehrmals aufgestellte Gleichung

$$y^2 = \frac{x^3}{a-x} \text{ die Gleichung der Cissoide aus.}$$

Setzen wir in dieser Gleichung $x = o$, so wird $y = o$, d. h. die Spitze der Cissoide fällt, wie wir schon wissen, in den Anfangspunct der Coordinaten;

$$\text{setzen wir } x = \frac{a}{2}, \text{ so wird } y = \sqrt{\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^3}{\frac{a}{2}}} = \frac{a}{2}, \text{ d. h.}$$

die Cissoide geht durch den Halbierungspunct des über AB liegenden Halbkreises;

$$\text{setzen wir } x = a, \text{ so wird } y = \infty;$$
$$\text{für } x > a \text{ wird } y = \sqrt{-\frac{x^3}{x-a}}, \text{ d. h. imaginär,}$$

$$\text{für } x = -x \text{ wird } y = \sqrt{-\frac{x^3}{a+x}}, \text{ d. h. imaginär;}$$

die Curve hat also nur reelle Werthe, so lange x zwischen o und + a liegt, sie erstreckt sich also nur nach der positiven Seite der X Axe hin.

Da ferner die Gleichung sich nicht ändert für $y = \pm$, so giebt jedes x zwei Werthe für y, den einen positiv, den andern negativ, die aber absolut genommen einander gleich sind, $y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{a-x}}$; demnach ist die Cissoide symmetrisch zu beiden Seiten der X Axe, ihre beiden Aeste sind congruent und ebenso ergiebt sich unmittelbar, dass Cissoiden mit gleichen Axen congruent sein müssen. Da mit wachsendem x x^3 grösser und $a-x$ kleiner wird, so wachsen die Ordinaten mit den Abscissen.

Soll man x durch y ausdrücken, so hat man

$$x^3 = ay^2 - xy^2 \text{ oder } x^3 + y^2 x - ay^2 = 0$$

und hieraus mit Hilfe der Cardan'schen Formel

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left\{ay^2 + \sqrt{a^2y^4 + \frac{4}{27}y^6}\right\}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left\{ay^2 - \sqrt{a^2y^4 + \frac{4}{27}y^6}\right\}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{2}y^2\left\{a + \sqrt{a^2 + \frac{4}{27}y^2}\right\}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}y^2\left\{a - \sqrt{a^2 + \frac{4}{27}y^2}\right\}}$$

die beiden andern Wurzeln der Gleichung sind imaginär.

§. 9. Wir haben oben (§ 3) den Gegenvector v' bestimmt, auch gefunden, dass $v' = a$ wird, wenn $x = \frac{2}{3}a$ ist, wir wollen jetzt untersuchen, für welchen Werth von x v' ein Minimum wird.

$$\text{Es war oben } v'^2 = \frac{a^3 - 3a^2x + 3ax^2}{a-x} = f(x),$$

$$\text{dann wird } \frac{df(x)}{dx} = \frac{(a-x)(-3a^2+6ax) + (a^3 - 3a^2x + 3ax^2)}{(a-x)^2}$$

$$= \frac{-3a^3 + 6a^2x + 3a^2x - 6ax^2 + a^3 - 3a^2x + 3ax^2}{(a-x)^2}$$

$$= \frac{-2a^3 + 6a^2x - 3ax^2}{(a-x)^2} = \frac{a(6ax - 3x^2 - 2a^2)}{(a-x)^2}$$

$$\text{Nun setzen wir } \frac{df(x)}{dx} = 0, \text{ d. h.}$$

$$a(6ax - 3x^2 - 2a^2) = 0, \text{ oder } 6ax - 3x^2 - 2a^2 = 0,$$

$$x^2 - 2ax + \frac{2}{3}a^2 = 0,\ x = a \pm \sqrt{a^2 - \frac{2}{3}a^2} = a \pm \frac{a}{\sqrt{3}},$$

da aber x nicht > a sein darf, so passt nur

$$x = a - \frac{a}{\sqrt{3}} = a\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

Um zu bestimmen, ob dieser Werth von x ein Maximum oder Minimum für v' giebt, bilden wir

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{(a-x)^2 (6a^2 - 6ax) + (6a^2x - 3ax^2 - 2a^3)\, 2(a-x)}{(a-x)^4}$$

$$= \frac{2(a-x)\left\{3a^3 - 3a^2x - 3a^2x + 3ax^2 + 6a^2x - 3ax^2 - 2a^3\right\}}{(a-x)^4} = \frac{2a^3}{(a-x)^3}$$

Setzen wir hierin den Werth von x aus $\frac{d f(x)}{dx} = 0$ ein, so erhalten wir

$$\frac{2a^3}{\left(a - a + \frac{a}{\sqrt{3}}\right)^3} = \frac{2a^3}{\left(\frac{a^3}{(\sqrt{3})^3}\right)} = 2\sqrt{3^3} = 6\sqrt{3}$$

Dieser Werth ist +, also wird v'^2 für $x = a\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ ein Minimum, also auch v' für diesen Werth von x ein Minimum.

Wenn wir nun in v' $x = a\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ setzen, so wird, da $x^2 = a^2 - 2a^2\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{a^2}{3}$,

$$v' = \sqrt{\frac{a^3 - 3a^3 + 3a^3\sqrt{\frac{1}{3}} + 3a^3 - 6a^3\sqrt{\frac{1}{3}} + a^3}{a\sqrt{\frac{1}{3}}}} = \sqrt{\frac{2a^3 - 3a^3\sqrt{\frac{1}{3}}}{a\sqrt{\frac{1}{3}}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2a^2 - a^2\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{1}{3}}}} = a\sqrt{2\sqrt{3} - 3}$$

§. 10. Vorhin (§. 8.) haben wir als Gleichung der Cissoide hingestellt

$$y^2 = \frac{x^3}{a-x};$$

es soll jetzt untersucht werden, ob jede Linie, welche für rechtwinklige Coordinaten durch diese Gleichung dargestellt wird, eine Cissoide ist.

Fig. 1. Es sei A Anfangspunct, AX die X Axe, AT die Y Axe; auf AX schneide man von A aus AB = a ab, beschreibe um AB als Durchmesser einen Kreis und ziehe durch B EE′ ⊥ AB, dann folgt unmittelbar aus der Gleichung, dass für $x = 0$ auch $y = 0$ ist, d. h. die Curve hat ihren Anfangspunct in A; für $x = \frac{a}{2}$ ist $y = \frac{a}{2}$, also geht die Curve durch den Halbierungspunct des Halbkreises über AB, für $x = a$ wird $y = \infty$, für $x > a$ y imaginär, d. h. die

Curve trifft in unendlicher Entfernung die EE′ und geht nicht über dieselbe hinaus; für x = — wird y imaginär, die Curve erstreckt sich also blos nach der positiven Seite der XAxe hin und da endlich für $0 < x < a$ y zwei absolut genommen gleiche, dem Vorzeichen nach entgegengesetzte endliche und reelle Werthe erhält, so hat die Curve zwei von A auslaufende, symmetrisch zu beiden Seiten der X Axe sich erstreckende Aeste.

Sei nun F irgend ein von A verschiedner Punct der fraglichen Linie ober- oder unterhalb der X Axe, AP sein x, ± FP sein y, so ziehe man die Secante AF bis zum Durchschnitt mit der Peripherie des Kreises in K und mit EE′ in C, welche Durchschnittspuncte oberhalb oder unterhalb AB liegen, jenachdem F oberhalb oder unterhalb AB angenommen wird, dann ist

$$AF^2 = AP^2 + (\pm FP)^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \frac{x^3}{a-x} = \frac{ax^2}{a-x},$$

$$\text{also } AF = x\sqrt{\frac{a}{a-x}};$$

$$\text{ferner ist } AP^2 : (\pm FP)^2 = AB^2 : (\pm BC)^2, \text{ d. h.}$$

$$x^2 : y^2 = a^2 : BC^2, \text{ also } BC^2 = \frac{a^2 y^2}{x^2} = \frac{a^2 x}{a-x};$$

$$AP : AF = AB : AC, \text{ d. h.}$$

$$x : x\sqrt{\frac{a}{a-x}} = a : AC, \text{ also } AC = a\sqrt{\frac{a}{a-x}};$$

$$AC \,.\, KC = BC^2, \text{ d. h. } KC = \frac{BC^2}{AC} = \frac{a^2 x}{a-x} : a\sqrt{\frac{a}{a-x}} = \frac{ax\sqrt{a-x}}{(a-x)\sqrt{a}} = x\sqrt{\frac{a}{a-x}},$$

$$\text{folglich ist } AF = CK.$$

Da aber F ganz beliebig angenommen ist, so ist die Linie, welche für rechtwinklige Coordinaten durch die Gleichung

$$y^2 = \frac{x^3}{a-x}$$

dargestellt wird, nach §. 1 und §. 2 eine Cissoide, deren Axe = a, deren Spitze in den Anfangspunct der Coordinaten und deren Axe mit der X Axe des Coordinatensystems zusammenfällt.

§. 11. Aus der Gleichung ergiebt sich nun auch die *Lage der Curve* gegen die Coordinaten-Axen.

Ist nämlich $y = f(x)$ die Gleichung einer Curve, und es ist $y = \pm$ und gleichzeitig $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \pm$, so kehrt die Curve der X Axe die convexe Seite zu, ist dagegen $y = \pm$ und $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \mp$ so die concave.

Wir haben nun

$$y^2 = \frac{x^3}{a-x}, \text{ folgl.}$$

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{(a-x)3x^2+x^3}{(a-x)^2} = \frac{3ax^2-3x^3+x^3}{(a-x)^2} = \frac{3ax^2-2x^3}{(a-x)^2}, \text{ also}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3ax^2-2x^3}{2y(a-x)^2} = \frac{3ax^2-2x^3}{2(a-x)^2}.\pm\sqrt{\frac{a-x}{x^3}} = \pm\frac{3a-2x}{2(a-x)}\sqrt{\frac{x}{a-x}} = \pm\frac{(3a-2x)x^{\frac{1}{2}}}{2(a-x)^{\frac{3}{2}}},$$

Demnach wird

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(a-x)^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}(-2)+2(a-x)^{\frac{3}{2}}(3a-2x)\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-(3a-2x)x^{\frac{1}{2}}2.\frac{3}{2}(a-x)^{\frac{1}{2}}(-1)}{4(a-x)^3}$$

$$= \frac{-4(a-x)^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}+(a-x)^{\frac{3}{2}}(3a-2x)x^{-\frac{1}{2}}+3(3a-2x)x^{\frac{1}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}}}{4(a-x)^3}$$

$$= \frac{-4(a-x)x+(a-x)(3a-2x)+3(3a-2x)x}{4(a-x)^{\frac{5}{2}}x^{\frac{1}{2}}} = \frac{-4ax+4x^2+3a^2-3ax-2ax+2x^2+9ax-6x^2}{4(a-x)^{\frac{5}{2}}x^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{3a^2}{4(a-x)^{\frac{5}{2}}x^{\frac{1}{2}}} = \frac{3a^2}{4\sqrt{(a-x)^5x}}.$$

Das Vorzeichen von $\frac{d^2y}{dx^2}$ hängt also blos vom Divisor ab; unter $\sqrt{\ }$ steht immer $+$, die $\sqrt{\ }$ aber ist $\pm$, jenachdem y $\pm$ ist, also ist für $y = \pm$ auch $\frac{d^2y}{dx^2} = \pm$, d. h. die Cissoide kehrt der X Axe die convexe Seite zu.

§. 12. Eine nur wenig abweichende Gestalt erhält die Gleichung der Cissoide, wenn man das rechtwinklige Coordinaten-System verlegt.

a, Es sei zunächst B der Anfangspunct der rechtwinkligen Coordinaten und BA die X Axe, also die Abscissen nach linkshin $+$, EE′ sei die Y Axe; nennen wir nun die Coordinaten eines Punctes in Bezug auf das neue System x' und y', die Coordinaten desselben Punctes für das alte System x und y, dann ist $x' = a-x$, also $x = a-x'$,

$$y' = y, \text{ folgl.}$$

$$y'^2 = \frac{(a-x')^3}{x'}$$

b, Nehmen wir wieder B als Anfangspunct, jetzt aber die Asymptote EE′ als X Axe und zwar nach oben $+$, die Axe BA als Y Axe und zwar nach links $+$ und nennen wir die Coordinaten eines Punctes xy im alten System in Bezug auf das neue x'' y'', so wird

$$x'' = y$$

$$y'' = a-x, \text{ also } x = a-y'',$$

folglich die Gleichung der Cissoide

$$x''^2 = \frac{(a-y'')^3}{y''}$$

c, Nehmen wir den Mittelpunct des Erzeugungskreises als Anfangspunct der Coordinaten, die Axe OA nach links als $+$ X Axe, so ist, wenn wir die Coordinaten eines Punctes xy im alten System in Bezug auf das neue System ξ η nennen,

$$\xi = \frac{a}{2} - x, \text{ also } x = \frac{a}{2} - \xi,$$

$$\eta = y, \text{ also}$$

die Gleichung der Cissoide

$$\eta^2 = \frac{\left(\frac{a}{2} - \xi\right)^3}{\frac{a}{2} + \xi}$$

Setzen wir $\xi = 0$, so ist $\eta = \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^3}}{\frac{a}{2}} = \pm \frac{a}{2}$, d. h.

der zugehörige Punct liegt im Halbierungspuncte des Halbkreises über AB als Durchmesser; setzen wir $\xi = \frac{a}{2}$ so ist $\eta = 0$, d. h. der zugehörige Punct liegt auf der X Axe in A; setzen wir $\xi > \frac{a}{2}$, so wird y imaginär, in A hört also die Curve auf;

nehmen wir $\xi = -$, so wird $\eta = \frac{\left(\frac{a}{2} + \xi\right)^3}{\frac{a}{2} - \xi}$,

so dass für diesen Fall die Curve auch nach der — Seite der X Axe hin sich erstreckt;

$$\text{für } \xi = - \frac{a}{2} \text{ wird } \eta = \infty;$$

wird endlich das absolute ξ nach der — Seite hin $> \frac{a}{2}$, so wird η imaginär, was auch mit dem früher Gefundenen übereinstimmt.

Im Folgenden soll das ursprüngliche rechtwinklige Coordinatensystem beibehalten werden.

§. 13. *Die Polargleichung der Cissoide.*

Die Coordinaten des Pols in Bezug auf das ursprüngliche rechtwinklige System seien ξ, η, der feste Schenkel des Polarwinkels φ sei der X Axe parallel und liege nach der Richtung der + X, die Polarwinkel mögen vom festen Schenkel nach oben von 0° bis 360° gezählt werden, der bewegliche Schenkel dieses Winkels sei v, dann ist für jeden Punct, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y sind,

$$x = \xi + v \cos \varphi$$
$$y = \eta + v \sin \varphi.$$

Für die Cissoide erhalten wir also, da

$$y^2 = \frac{x^3}{a - x}$$

ist,

$$(\eta + v \sin\varphi)^2 = \frac{(\xi + v\cos\varphi)^3}{a - \xi - v\cos\varphi}, \text{ oder}$$

$$(\eta^2 + 2v\eta\sin\varphi + v^2\sin^2\varphi)(a - \xi - v\cos\varphi) = \xi^3 + 3v\xi^2\cos\varphi + 3v^2\xi\cos^2\varphi + v^3\cos^3\varphi,$$

$$a\eta^2 + 2av\eta\sin\varphi + av^2\sin^2\varphi - \xi\eta^2 - 2v\xi\eta\sin\varphi - v^2\xi\sin^2\varphi - v\eta^2\cos\varphi - 2v^2\eta\sin\varphi\cos\varphi$$
$$- v^3\sin^2\varphi\cos\varphi = \xi^3 + 3v\xi^2\cos\varphi + 3v^2\xi\cos^2\varphi + v^3\cos^3\varphi,$$

$$\{\cos^3\varphi + \sin^2\varphi\cos\varphi\}v^3 + \{3\xi\cos^2\varphi + 2\eta\sin\varphi\cos\varphi + \xi\sin^2\varphi - a\sin^2\varphi\}v^2 +$$
$$\{3\xi^2\cos\varphi + \eta^2\cos\varphi + 2\xi\eta\sin\varphi - 2a\eta\sin\varphi\}v + \xi^3 + \xi\eta^2 - a\eta^2 = 0$$

$$\cos\varphi\, v^3 + \{2\xi\cos^2\varphi + 2\eta\sin\varphi\cos\varphi - a + a\cos^2\varphi + \xi\}v^2 + \{(3\xi^2 + \eta^2)\cos\varphi +$$
$$2\eta(\xi - a)\sin\varphi\}v + \xi^3 + (\xi - a)\eta^2 = 0$$

$$\cos\varphi\, v^3 + \{(2\xi + a)\cos^2\varphi + (\xi - a) + 2\eta\sin\varphi\cos\varphi\}v^2 + \{(3\xi^2 + \eta^2)\cos\varphi +$$
$$2\eta(\xi - a)\sin\varphi\}v + \xi^3 + (\xi - a)\eta^2 = 0$$

Verlegt man den Pol nach A, d. h. in die Spitze der Cissoide, so ist $\xi = \eta = 0$, folgl. wird die Polargleichung der Cissoide für diesen Fall

$$\cos\varphi\, v^3 + \{a\cos^2\varphi - a\}v^2 = 0, \text{ oder } v\cos\varphi = a(1 - \cos^2\varphi) = a\sin^2\varphi, \text{ d. h.}$$

$$v = \frac{a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}.$$

Dies ergiebt sich auch unmittelbar, wenn wir in der Gleichung

$$y^2 = \frac{x^3}{a - x}$$

$y = v\sin\varphi$ und $x = v\cos\varphi$ setzen; denn dann wird

$$v^2\sin^2\varphi = \frac{v^3\cos^3\varphi}{a - v\cos\varphi}, \text{ oder } a\,v^2\sin^2\varphi - v^3\sin^2\varphi\cos\varphi = v^3\cos^3\varphi, \text{ oder}$$

$$a\sin^2\varphi = v\cos\varphi(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = v\cos\varphi, \text{ d. h.}$$

$$v = \frac{a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$$

die Werthe von φ sind jedoch hier blos zwischen 0° bis 90° und 270° bis 360° zu nehmen. Es wird nämlich für

$$\varphi = 0 \qquad v = 0$$

$$\varphi = 45^\circ \qquad v = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$$

$$\varphi = 90^\circ \qquad v = \frac{a}{0} = \infty$$

$$\varphi = 180^\circ - \varphi \qquad v = \frac{a\sin^2\varphi}{-\cos\varphi} = -\frac{a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$$

$$\varphi = 180 \qquad v = 0$$

$$\varphi = 180 + \varphi \qquad v = \frac{a(-\sin\varphi)^2}{-\cos\varphi} = -\frac{a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$$

$$\varphi = 270^0 \qquad v = \frac{a(-1)^2}{0} = \infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi = 360 - \varphi \\ \varphi = -\varphi\end{array}\right\} v = \frac{a(-\sin\varphi)^2}{\cos\varphi} = \frac{a \sin^2\varphi}{\cos\varphi}$$

Die Werthe für φ im zweiten und dritten Quadranten geben also ein $-v$, welches hier nicht brauchbar ist. Wollte man sagen, dass dadurch die Puncte der Curve umfasst werden, welche man erhält, wenn man das betreffende v rückwärts über A um seine Länge verlängert, so würde man für φ im zweiten Quadranten dieselben Puncte erhalten, als für φ im vierten Quadranten, und ebenso für φ im dritten Quadranten dieselben als für φ im ersten Quadranten.

Die letzten Werthe obiger Zusammenstellung zeigen ferner, dass man auch sämmtliche Puncte der Cissoide erhält, wenn man φ von 0^0 bis $+90^0$ und von 0^0 bis -90^0 nimmt.

Fällt ferner der Pol in den Durchschnittspunct der Axe und Asymptote, so wird $\xi = a$, $\eta = 0$, also die Polargleichung für diesen Fall

$$v^3 \cos\varphi + 3 a v^2 \cos^2\varphi + 3 a^2 v \cos\varphi + a^3 = 0$$

Liegt der Pol im Mittelpunct der Axe, so ist $\xi = \frac{a}{2}$, $\eta = 0$, also die Polargleichung

$$v^3 \cos\varphi + v^2 \left\{2 a \cos^2\varphi - \frac{a}{2}\right\} + \frac{3}{4} a^2 v \cos\varphi + \frac{1}{8} a^3 = 0$$

§. 14. Ehe wir dazu übergehen die Eigenschaften der *Tangente, Subtangente etc.* an der Cissoide zu untersuchen, wollen wir noch die Entstehung der Cissoide durch stetige Bewegung eines Punctes nachweisen.

Wenn nämlich die Scheitel zweier gleicher Parabeln ursprünglich zusammenfallen, während aber die eine die entgegengesetzte Lage der andern hat, und es rollt die eine bewegliche auf der andern festen fort, so beschreibt der Scheitel der erstern eine Cissoide, deren Axe gleich dem halben Parameter der Parabel ist.

Es sei CAB die feste, EAP die rollende Parabel in ihrer ursprünglichen Lage, so dass A der Scheitel beider Parabeln und zugleich Anfangspunct der Coordinaten, die Y Axe aber gemeinschaftliche Tangente in diesem Puncte ist; auf dem festen Coordinaten-System XY liege zugleich ein bewegliches X'Y', welches mit der rollenden Parabel fest verbunden ist; die Gleichung der festen Parabel in Bezug auf das feste System sei $\beta = \sqrt{2p\alpha}$, die der rollenden in Bezug auf das bewegliche System $\eta = \sqrt{2p\xi}$. *Fig.* 3

In einer zweiten Lage sei der Berührungspunct beider Parabeln C, dann gilt für ihn noch immer die Gleichung $\eta' = \sqrt{2p\xi'}$;
die gemeinsame Tangente CN bilde mit der festen X Axe den $\angle\varphi$, mit der beweglichen X' Axe den $\angle\varphi'$; nennen wir nun die Coordinaten des beschreibenden Punctes A' x_1 und y_1, so erhalten wir

$$y_1 = A'K = FD - A'O = GC + HD - A'O$$

$$x_1 = A'J = KG - AG = OD + HC - AG.$$

Aber $GC = \beta_1$, $HD = CD \cos HDC$ und da $CD = \eta_1$ und $\angle HDC = A'DO = KMA' = \varphi + \varphi'$, so wird

$$HD = \eta_1 \cos(\varphi + \varphi')$$
$$A'O = A'D \sin A'DO = \xi_1 \sin(\varphi + \varphi')$$
$$OD = A'D \cos A'DO = \xi_1 \cos(\varphi + \varphi')$$
$$HC = CD \sin HDC = \eta_1 \sin(\varphi + \varphi')$$

$AG = \alpha_1$, folgl. erhalten wir für die specielle Lage des Punctes A' die Coordinaten

$$y_1 = \beta_1 + \eta_1 \cos(\varphi + \varphi') - \xi_1 \sin(\varphi + \varphi')$$
$$x_1 = -\alpha_1 + \eta_1 \sin(\varphi + \varphi') + \xi_1 \cos(\varphi + \varphi')$$

Ferner ist arc CA = arc CA', d. h.

$$\int \sqrt{1 + \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}\, d\alpha = \int \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}\, d\xi.$$

Nun ist aber $\beta^2 = 2p\alpha$, also

$$2\beta \frac{d\beta}{d\alpha} = 2p, \text{ oder } \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{p}{\beta} = \sqrt{\frac{p}{2p\alpha}} = \sqrt{\frac{p}{2\alpha}},$$

$$\text{analog wird } \frac{d\eta}{d\xi} = \sqrt{\frac{p}{2\xi}}.$$

Allgemein aber ist

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \operatorname{tg}\varphi,\ \frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg}\varphi', \text{ d. h.}$$

$$\sqrt{\frac{p}{2\alpha}} = \operatorname{tg}\varphi,\ \alpha = \frac{p}{2\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{p\cos^2\varphi}{2\sin^2\varphi},\ \beta = \sqrt{\frac{2p^2\cos^2\varphi}{2\sin^2\varphi}} = \frac{p\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$d\alpha = \frac{\{2\sin^2\varphi\, p.\, 2\cos\varphi(-\sin\varphi) - p\cos^2\varphi.\, 2.\, 2\sin\varphi\cos\varphi\}\, d\varphi}{4\sin^4\varphi}$$

$$= -\frac{(p\sin^2\varphi\cos\varphi + p\cos^3\varphi)}{\sin^3\varphi}\, d\varphi = -\frac{p\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\, d\varphi$$

$$\text{Ebenso wird } \sqrt{\frac{p}{2\xi}} = \operatorname{tg}\varphi',\ \xi = \frac{p\cos^2\varphi'}{2\sin^2\varphi'},$$

$$\eta = \frac{p\cos\varphi'}{\sin\varphi'},\ d\xi = -\frac{p\cos\varphi'}{\sin^3\varphi'}\, d\varphi' \text{ folgl.}$$

$$\int \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}\left(\frac{-p\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\, d\varphi\right) = \int \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi'}\left(\frac{-p\cos\varphi^{2'}}{\sin^3\varphi'}\, d\varphi'\right)$$

$$\int \frac{1}{\cos\varphi}\cdot\left(\frac{-p\cos\varphi\, d\varphi}{\sin^3\varphi}\right) = \int \frac{1}{\cos\varphi'}\left(\frac{-p\cos\varphi'\, d\varphi'}{\sin^3\varphi'}\right)$$

$$-p\int \frac{d\varphi}{\sin^3\varphi} = -p\int \frac{d\varphi'}{\sin^3\varphi'}, \text{ d. h. } \varphi = \varphi'$$

Was aber oben von den Coordinaten des Punctes A' in der fixierten Lage gilt, das gilt ebenso in jeder andern Lage, so dass wir für x und y die Relation erhalten

$$y = \beta + \eta \cos(\varphi + \varphi') - \xi \sin(\varphi + \varphi')$$
$$x = -\alpha + \eta \sin(\varphi + \varphi') + \xi \cos(\varphi + \varphi'),$$

oder mit Berücksichtigung der gefundenen Werthe

$$y = \frac{p \cos\varphi}{\sin\varphi} + p\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\cos 2\varphi - \frac{p\cos^2\varphi}{2\sin^2\varphi}\sin 2\varphi$$
$$x = -\frac{p\cos^2\varphi}{2\sin^2\varphi} + \frac{p\cos\varphi}{\sin\varphi}\sin 2\varphi + \frac{p\cos^2\varphi}{2\sin^2\varphi}\cos 2\varphi, \text{ oder}$$
$$y = \frac{p\cos\varphi}{\sin\varphi}(1+\cos 2\varphi) - \frac{p\cos^2\varphi\sin 2\varphi}{2\sin^2\varphi}$$
$$= \frac{p\cos\varphi}{\sin\varphi}2\cos^2\varphi - \frac{p\cos^2\varphi}{2\sin^2\varphi}2\sin\varphi\cos\varphi = \frac{p\cos^3\varphi}{\sin\varphi}$$
$$x = -\frac{p\cos^2\varphi}{2\sin^2\varphi}(1-\cos 2\varphi) + \frac{p\cos\varphi}{\sin\varphi}2\sin\varphi\cos\varphi$$
$$= -\frac{p\cos^2\varphi}{2\sin^2\varphi}2\sin^2\varphi + 2p\cos^2\varphi = p\cos^2\varphi, \text{ folgl.}$$
$$\cos^2\varphi = \frac{x}{p}, \quad \cos\varphi = \sqrt{\frac{x}{p}}, \text{ also}$$
$$y = \frac{p\frac{x}{p}\sqrt{\frac{x}{p}}}{\sqrt{1-\frac{x}{p}}} = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{p-x}} = \sqrt{\frac{x^3}{p-x}}, \text{ also}$$
$$y^2 = \frac{x^3}{p-x}.$$

dies aber ist die Gleichung einer Cissoide, deren Erzeugungskreis zum Durchmesser p hat.

§. 15. Die Gleichungen für die *Tangente*, *Normale*, *Subtangente*, *Subnormale* an der Cissoide zu finden.

a. *Tangente.*

Die Gleichung der *Tangente* eines Punctes x, y, einer Curve $y = \varphi(x)$ ist

$$y - y' = \frac{dy,}{dx,}(x - x,)$$

Die Gleichung der Cissoide $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$ differenziiert giebt

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{\{(a-x)3x^2 - x^3(-1)\}}{(a-x)^2} = \frac{3ax^2-2x^3}{(a-x)^2}$$

$$\text{folgl. } \frac{dy}{dx} = \frac{3ax^2-2x^3}{2y(a-x)^2}, \text{ d. h. } \frac{dy,}{dx,} = \frac{3ax,^2-2x,^3}{2y,(a-x,)^2}$$

Dies in die Gleichung der Tangente eingesetzt giebt

$$y-y_, = \frac{3ax^2_, - 2x_,^3}{2y_,(a-x_,)^2}(x-x_,) \text{ oder: } y-y_, = \frac{3ax_,^2-2x_,^3}{2\sqrt{\frac{x_,^3}{a-x_,}}(a-x_,)^2}(x-x_,)$$

$$= \frac{(3a-2x_,)\sqrt{x_,}}{2\sqrt{(a-x_,)^3}}(x-x_,),$$

$$y = \frac{(3ax_,^2-2x_,^3)(x-x_,)+2y_,^2(a-x_,)^2}{2y_,(a-x_,)^2}$$

$$= \frac{(3ax_,^2-2x_,^3)(x-x_,)+2x_,^3(a-x_,)}{\pm 2x_,^{\frac{3}{2}}(a-x_,)^{\frac{3}{2}}} = \pm\left\{\frac{3ax_,^{\frac{1}{2}}-2x_,^{\frac{3}{2}}}{2(a-x_,)^{\frac{3}{2}}}x - \frac{3ax_,^3-2x_,^4-2ax_,^3+2x_,^4}{2x_,^{\frac{3}{2}}(a-x_,)^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

$$= \pm\left\{\frac{3ax_,^{\frac{1}{2}}-2x_,^{\frac{3}{2}}}{2(a-x_,)^{\frac{3}{2}}}x - \frac{ax_,^{\frac{3}{2}}}{2(a-x_,)^{\frac{3}{2}}}\right\} = \pm\frac{x_,^{\frac{1}{2}}\{3a-2x_,-ax_,\}}{2(a-x_,)^{\frac{3}{2}}}, \text{ also}$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{x}\{3a-(2+a)x_,\}}{2\sqrt{(a-x_,)^3}},$$

und zwar ist das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem $y = \pm$ ist.

b, die Gleichung der *Normale* ist für einen Punct $x_, y_,$ einer Curve $y = \varphi(x)$

$$\frac{dy_,}{dx_,}(y-y_,) + x - x_, = 0, \text{ folgl.}$$

$$\frac{3ax_,^2-2x_,^3}{2y_,(a-x_,)^2}(y-y_,)+x-x_,=0$$

$$(3ax_,^2-2x_,^3)y = -(x-x_,)2y_,(a-x_,)^2+(3ax_,^2-2x_,^3)y_,$$

$$y = \frac{-2(x-x_,)(a-x_,)^2y_,+(3ax_,^2-2x_,^3)y_,}{3ax_,^2-2x_,^3}$$

$$= \frac{-2(a-x_,)^2y_,x + \{2(a-x_,)^2x_,+3ax_,^2-2x_,^3\}y_,}{3ax_,^2-2x_,^3}$$

$$y = \frac{-2(a-x_,)^2y_,x+(2a^2x_,-4ax_,^2+2x_,^3+3ax_,^2-2x_,^3)y_,}{3ax_,^2-2x_,^3}$$

$$= \frac{-2(a-x_,)^2y_,x+(2a^2x_,-ax_,^2)y_,}{(3ax_,^2-2x_,^3)} = \frac{-2(a-x_,)^2y_,x+ax_,(2a-x_,)y_,}{x_,^2(3a-2x_,)}$$

$$= \frac{\mp 2(a-x_,)^{\frac{3}{2}}x_,^{\frac{3}{2}}x \pm ax_,(2a-x_,)x_,^{\frac{3}{2}}(a-x_,)^{-\frac{1}{2}}}{x_,^2(3a-2x_,)}$$

$$= \frac{\mp 2(a-x_,)^2x \pm a(2a-x_,)x_,}{(3a-2x_,)(a-x_,)^{\frac{1}{2}}x_,^{\frac{1}{2}}}, \text{ also}$$

$$y = \frac{\mp(a-x_,)^2x \pm a(2a-x_,)x_,}{(3a-2x_,)\sqrt{(a-x_,)x_,}}$$

c. Um die Länge der Tangente und Normale zwischen Berührungspunct und Abscissenaxe zu bestimmen, so wie die Subtangente und Subnormale, wollen wir den Winkel, welchen der

auf der + Seite der Ordinaten liegende Theil der Tangente eines Curven-Punctes x y mit der + X Axe einschliesst, φ nennen;

$$\text{dann ist } \operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{3ax^2 - 2x^3}{2y(a-x)^2} = \frac{3ax^2 - 2x^3}{\pm 2(a-x)^2\sqrt{\frac{x^3}{a-x}}} = \pm \frac{(3a-2x)\sqrt{x}}{2(a-x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \pm \frac{3a-2x}{2(a-x)}\sqrt{\frac{x}{a-x}}, \text{ jenachdem } y = \pm \text{ ist.}$$

Da nun die Subtangente $S = \frac{y}{\operatorname{tg}\varphi} = y\frac{dx}{dy}$

die Subnormale $Sn = y \operatorname{tg}\varphi = y\frac{dy}{dx}$,

die Tangente $T = y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$

die Normale $N = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, so erhält man durch Substitution der Werthe für $\frac{dx}{dy}$ und $\frac{dy}{dx}$

$$S = \frac{2y^2(a-x)^2}{3ax^2-2x^3} = \frac{2x^3(a-x)}{3ax^2-2x^3} = \frac{2(a-x)x}{3a-2x};$$

$$Sn = \frac{y(3ax^2-2x^3)}{2y(a-x)^2} = \frac{(3a-2x)x^2}{2(a-x)^2};$$

$$T = \sqrt{y^2+\left(y\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{y^2+S^2} = \sqrt{\frac{x^3}{a-x}+\frac{4(a-x)^2x^2}{(3a-2x)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{x^3(3a-2x)^2+4x^2(a-x)^3}{(a-x)(3a-2x)^2}}$$

$$= \frac{x}{3a-2x}\sqrt{\frac{9a^2x-12ax^2+4x^3+4a^3-12a^2x+12ax^2-4x^3}{a-x}}$$

$$= \frac{x}{3a-2x}\sqrt{\frac{4a^3-3a^2x}{a-x}} = \frac{ax}{3a-2x}\sqrt{\frac{4a-3x}{a-x}}.$$

$$N = \sqrt{y^2+\left(y\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{y^2+(Sn)^2} = \sqrt{\frac{x^3}{a-x}+\frac{(3a-2x)^2x^4}{4(a-x)^4}}$$

$$= \sqrt{\frac{4x^3(a-x)^3+(3a-2x)^2x^4}{4(a-x)^4}} = \frac{x}{2(a-x)^2}\sqrt{4x(a-x)^3+(3a-2x)^2x^2}$$

$$= \frac{x}{2(a-x)^2}\sqrt{4a^3x-12a^2x^2+12ax^3-4x^4+9a^2x^2-12ax^3+4x^4}$$

$$= \frac{x}{2(a-x)^2}\sqrt{4a^3x-3a^2x^2} = \frac{ax}{2(a-x)^2}\sqrt{4ax-3x^2} = \frac{ax}{2(a-x)^2}\sqrt{x(4a-3x)}.$$

Setzen wir nun $x = 0$, so wird $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$, $\operatorname{tg}\varphi = 0$, d. h. $\varphi = 0^\circ$ oder $= 180^\circ$,

d. h. die Tangente der Spitze fällt mit der Axe zusammen; ebenso wird $Sn = 0$, $T = 0$, $N = 0$.

Setzen wir $x = \frac{a}{2}$, so wird $y = \frac{a}{2}$, $\frac{dy}{dx} = tg\,\varphi = \frac{3a\frac{a^2}{4} - 2\frac{a^3}{8}}{2\frac{a}{2}\frac{a^2}{4}} = 2$,

$S = \frac{2\frac{a}{2}\frac{a}{2}}{2a} = \frac{a}{4}$, d. h. die Subtangente ist gleich dem 4. Theil der Axe oder gleich der halben Abscisse; die Tangente schneidet also die Axe in der Entfernung $\frac{a}{4}$ von der Spitze der Cissoide.

$Sn = \frac{2a.\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2\left(\frac{a}{2}\right)^2} = a$, d. h. die Subnormale ist gleich der Axe oder auch der doppelten Abscisse.

$$T = \frac{\left(\frac{a^2}{2}\right)}{2a}\sqrt{\frac{\frac{5}{2}a}{\frac{a}{2}}} = \frac{a}{4}\sqrt{5}.$$

$$N = \frac{\frac{a^2}{2}}{2\left(\frac{a}{2}\right)^2}\sqrt{\frac{a}{2}\frac{5}{2}a} = \frac{a}{2}\sqrt{5}.$$

Setzen wir $x = a$, so wird $y = \infty$, $\frac{dy}{dx} = tg\,\varphi = \infty$, also $S = 0$, $Sn = \infty$, $T = \infty$, $N = \infty$.

Die Subtangente also $= 0$, die Tangente $= \infty$, d. h. die Tangente fällt mit der Asymptote zusammen, und es ergiebt sich aus den aufgestellten Werthen, dass jede Tangente, für welche $0 < x < a$ ist, die Axe in einem zwischen der Spitze und dem Fusspuncte der Ordinate liegenden Puncte schneidet. Für φ erhalten wir folgende Werthe, bei deren Aufstellung $a = 1$ gesetzt wurde:

x	tg φ	lg tg φ	φ
0	0	—	0°
0,25	$\frac{5}{3\sqrt{3}} = 0,9622504$	0,9832881 — 1	43° 53′ 52″
0,5	2	0,3010300	63 26 6
0,75	$3\sqrt{3} = 5,1961524$	0,7156819	79 6 23
1	∞	∞	90°

Setzen wir Sn $= a - x$, d. h. geht die Normale durch den Durchschnittspunct der Axe und Asymptote, so ist also

$$a - x = \frac{(3a - 2x)x^2}{2(a-x)^2},$$

$$2a^3 - 6a^2x + 6ax^2 - 2x^3 = 3ax^2 - 2x^3$$

$$3ax^2 - 6a^2x = -2a^3$$

$$x^2 - 2ax = -\frac{2}{3}a^2$$

$$x = a \pm \sqrt{a^2 - \frac{2}{3}a^2} = a \pm a\sqrt{\frac{1}{3}} = a\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}\right);$$

Da aber $x \leqq a$ sein muss, so wird

$$x = a\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

Die Normale ist für diesen Fall

$$N = \sqrt{y^2 + Sn^2} = \sqrt{\frac{a^3\left(1-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3}{a\sqrt{\frac{1}{3}}} + \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\left(1-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3\sqrt{3} + \frac{1}{3}}$$

$$= a\sqrt{2\sqrt{3} - 3 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = a\sqrt{2\sqrt{3} - 3}$$

d. h. N wird = dem kleinsten Gegenvector (§ 9.)

Setzen wir $\varphi = 45^0$ oder $= 135^0$, so ist $\operatorname{tg}\varphi = \pm 1$,

$$\text{d. h. } \pm\sqrt{\frac{(3a-2x)^2x}{4(a-x)^3}} = \pm 1, \text{ d. h.}$$

$$(3a-2x)^2 x = 4(a-x)^3$$

$$9a^2x - 12ax^2 + 4x^3 = 4a^3 - 12a^2x + 12ax^2 - 4x^3$$

$$8x^3 - 24ax^2 + 21a^2x - 4a^3 = 0$$

$$x^3 - 3ax^2 + \frac{21}{8}a^2x - \frac{1}{2}a^3 = 0$$

Um die Gleichung auf die gebräuchliche Form zu bringen, setzen wir $x = z + a$, und erhalten

$$\left.\begin{array}{l} z^3 + 3z^2a + 3za^2 + a^3 \\ \quad\; -3 \;\;\left|\; -6 \;\right|\; -3 \\ \qquad\quad\; +\frac{21}{8} \;\Big|\; +\frac{21}{8} \\ \qquad\qquad\qquad\;\; -\frac{1}{2} \end{array}\right\} = 0 = z^3 - \frac{3}{8}a^2z + \frac{1}{8}a^3$$

oder nach der Cardan'schen Formel

$$z=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{8}a^3+\sqrt{\frac{1}{64}a^6-\frac{4}{27}\cdot\frac{27}{512}a^6}\right.}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{8}a^3-\sqrt{\frac{1}{64}a^6-\frac{4}{27}\cdot\frac{27}{512}a^6}\right.}$$

$$=-\frac{a}{2}\left\{\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{1-\frac{1}{2}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{2}}}{2}}\right\}$$

$$=-\frac{a}{2}\left\{\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}}\right\},$$

die beiden andern Werthe für z sind imaginär, folglich ist

$$x=a+z=a\left[1-\frac{1}{2}\left\{\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}}\right\}\right]$$

da aber $S=\frac{y}{\operatorname{tg}\varphi}$, so wird $S=y$

- - $Sn=y\operatorname{tg}\varphi$, - - $Sn=y$

- - $T=\sqrt{y^2+S^2}$, - - $T=y\sqrt{2}$

- - $N=\sqrt{y^2+Sn^2}$, - - $N=y\sqrt{2}$.

Für diesen Werth von x sind also Ordinate, Subtangente und Subnormale einerseits und Tangente und Normale andrerseits absolut genommen einander gleich.

Berechnen wir x, so erhalten wir für a = 1

$$\sqrt{\frac{1}{2}}=0{,}7071068,$$

$$\frac{1-\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}=0{,}1464466,\quad \frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}=0{,}8535534,$$

$$\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}}=0{,}5271001,\quad \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}}=0{,}9485864,$$

$$\frac{1}{2}\left\{\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}}\right\}=0{,}7378432,\ \text{also}$$

$$x=0{,}2621567.$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{\frac{(3a-2x)^2x}{4(a-x)^3}}=\sqrt{\frac{(3-0{,}5243134)^3.\ 0{,}2621567}{4(1-0{,}2621567)^3}}$$

$$= \sqrt{\frac{2,4756865^2 . \; 0,2621567}{4. \; 0,7378432^3}},$$

$$\lg \operatorname{tg} \varphi = 0,9999999 - 1, \quad \varphi = 44^0 \; 59' \; 59'', 9,$$

so dass also der Werth $\varphi = 45^0$ fast genau für das oben gefundene x sich herausstellt.

Soll nun an irgend einen Punct der Cissoide eine Tangente gezogen werden, so fällt man von demselben auf die Axe ein Loth und trägt von dessen Fusspuncte aus nach der Spitze zu den zugehörigen Werth der Subtangente auf der Axe ab, dadurch erhält man den Durchschnittspunct der Tangente mit der Axe.

Soll dagegen von einem Puncte der Axe eine Tangente an die Cissoide gezogen werden, so hat man das dem Berührungspunct zugehörige x zu suchen. Nennen wir aber den Abstand des gegebenen Punctes vom Anfangspuncte der Coordinaten σ, so ist

$$x = \sigma + S = \sigma + \frac{2(a-x)x}{3a-2x}, \text{ d. h. } 3ax - 2x^2 = 3a\sigma - 2x\sigma + 2ax - 2x^2,$$

$$(a + 2\sigma)x = 3a\sigma, \; x = \frac{3a\sigma}{a + 2\sigma},$$

$$\text{für } \sigma = 0 \quad \text{wird } x = 0$$

$$\text{-} \;\; \sigma = \frac{a}{2} \quad \text{-} \;\; x = \frac{3}{4} a$$

$$\text{-} \;\; \sigma = a \quad \text{-} \;\; x = a,$$

d. h. die vom Anfangspuncte der Coordinaten an die Cissoide gezogene Tangente berührt dieselbe in der Spitze und fällt mit der Axe zusammen, den Berührungspunct der vom Mittelpuncte des Erzeugungskreises gezogenen Tangente erhält man, wenn man in der Entfernung $\frac{3}{4}$ a von der Spitze auf der Axe ein Loth bis zur Cissoide errichtet, die vom Endpuncte der Axe gezogene Tangente fällt mit der Asymptote zusammen, wie schon früher gezeigt ist.

Wir wollen nun noch die Ausdrücke der *Tangente etc.* für Polarcoordinaten untersuchen.

Für einen Punct mit den Polarcoordinaten v und φ ist

$$\text{die Polarsubtangente (PS)} = v^2 \frac{d\varphi}{dv},$$

$$\text{Polarsubnormale (PSn)} = \frac{dv}{d\varphi}.$$

Ist $v^2 \frac{d\varphi}{dv} = +$, so liegt die Polarsubtangente nach der Richtung hin, nach welcher φ abnimmt, im andern Falle nach der Richtung der zunehmenden φ; umgekehrt verhält es sich mit dem Zeichen von $\frac{dv}{d\varphi}$ und der Lage der Polarsubnormale.

Um dies auf die Cissoide anzuwenden bilden wir zunächst $\frac{dv}{d\varphi}$ und $\frac{d\varphi}{dv}$; es war aber (§. 13.)

$$v \cos \varphi = a \sin^2 \varphi, \text{ folgl.}$$

$dv \cos \varphi - v \sin \varphi \, d\varphi = 2a \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi$, $dv \cos \varphi = (v + 2a \cos \varphi) \sin \varphi \, d\varphi$, also

$$\frac{dv}{d\varphi} = \frac{(v + 2a\cos\varphi)\sin\varphi}{\cos\varphi} \text{ und } \frac{d\varphi}{dv} = \frac{\cos\varphi}{(v + 2a\cos\varphi)\sin\varphi};$$

ferner ist $v^2 = \frac{a^2 \sin^4\varphi}{\cos^2\varphi}$, folgl. wird

$$PS = \frac{a^2\sin^4\varphi}{\cos^2\varphi} \cdot \frac{\cos\varphi}{(2a\cos\varphi + v)\sin\varphi} = \frac{a^2\sin^3\varphi}{2a\cos^2\varphi + v\cos\varphi} = \frac{a^2\sin^3\varphi}{2a\cos^2\varphi + a\sin^2\varphi}$$

$$= \frac{a\sin^3\varphi}{1 + \cos^2\varphi}, \text{ ferner}$$

$$PSn = \frac{(v + 2a\cos\varphi)\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\left\{2a\cos\varphi + \frac{a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\right\}\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{(2a\cos^2\varphi + a\sin^2\varphi)\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$$

$$= \frac{a(1 + \cos^2\varphi)\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$$

§. 16. Schon oben haben wir gesehen, dass die Cissoide dem im Endpuncte der Axe errichteten Lothe sich immer mehr nähert, ohne dasselbe je zu erreichen, d. h. dass dieses Loth *Asymptote* der Cissoide ist. Dasselbe Resultat ergiebt sich auch aus folgender analytischen Betrachtung.

Setzen wir in der Polargleichung den Radiusvector $v = \infty$ oder $= \frac{1}{0}$ und entwickeln daraus den Werth des zugehörigen φ, setzen wir ferner diesen Werth von φ in $PS = v^2 \frac{d\varphi}{dv}$ ein, so ist das Resultat die Länge des vom Anfangspuncte der Coordinaten auf die Asymptote gefällten Lothes, φ_1 aber der Winkel, den die Asymptote mit der Geraden bildet, von welcher aus die φ gezählt sind.

Ist $PS = \infty$ oder imaginär, so hat die Curve keine Asymptote.

Die Polargleichung der Cissoide war

$$v\cos\varphi = a\sin^2\varphi \quad (\S\ 13.);$$

$$\text{dies giebt für } v = \frac{1}{0} \quad \cos\varphi_1 = \frac{a\sin^2\varphi_1}{\frac{1}{0}} = 0, \text{ d. h. } \varphi_1 = \pm\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Nun war aber } PS = \frac{a\sin^3\varphi}{1 + \cos^2\varphi};$$

$$\text{dies giebt für } \varphi_1 = \pm\frac{\pi}{2} \quad PS = \frac{\pm a}{1} = \pm a.$$

Die Cissoide hat also eine Asymptote und zwar steht dieselbe auf der X Axe senkrecht in der Entfernung a vom Anfangspuncte der Coordinaten; das doppelte Zeichen bedeutet, dass sie nach beiden Seiten hingeht, wie wir schon oben fanden.

Ausser dieser geradlinigen Asymptote hat die Cissoide noch eine krummlinige.

Setzen wir nämlich $x = a - \alpha$, so bedeutet α den Abstand jedes Punctes der Cissoide von der geradlinigen Asymptote; durch diese Substitution erhalten wir aber

$$y^2 = \frac{a^3 - 3a^2\alpha + 3a\alpha^2 - \alpha^3}{\alpha},$$

wird α sehr klein, also x sehr gross, so wird die Gleichung sich immer mehr dem Werthe nähern

$$y^2 = \frac{a^3}{\alpha} \text{ oder } y^2\alpha = a^3.$$

Diese Gleichung gehört zu einer Hyperbel der 3. Ordnung, die sich also für die entfernter liegenden Puncte der Cissoide sehr nahe anschliesst; wird $\alpha = o$, d. h. $x = a$, so wird auch hier $y = \infty$.

Bei dieser Hyperbel muss $y = \sqrt{\frac{a^3}{\alpha}}$ werden, wenn die Entfernung von der geradlinigen Asymptote $= \alpha$ sein soll.

Berücksichtigen wir dagegen bei der Gleichung der Cissoide noch das zweite Glied, so wird

$$y = \sqrt{\frac{a^3}{\alpha} - 3a^2},$$

hier ist also y etwas kleiner, demnach finden wir einen bestimmten Abstand von der geradlinigen Asymptote früher bei der Cissoide, als bei der Hyperbel, d. h. die Cissoide liegt zwischen der geradlinigen Asymptote und dieser Hyperbel.

Die Aeste der Cissoide schliessen sich also einer Hyperbel dritter Ordnung an, deren Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten $y^2 = \frac{a^3}{a-x}$ *ist.*

§. 17. *Untersuchungen über Maximum und Minimum, sowie über die ausgezeichneten Puncte der Cissoide.*

Wir hatten oben (§ 11 pg. 14) $\frac{dy}{dx} = \frac{(3a-2x)\sqrt{x}}{2(a-x)^{\frac{3}{2}}}$,

setzen wir $\frac{dy}{dx} = 0$, so erhalten wir $\frac{(3a-2x)\sqrt{x}}{2(a-x)^{\frac{3}{2}}} = 0$;

dieser Gleichung wird genügt durch

a, $\sqrt{x} = 0$, b, $3a - 2x = 0$.

a, $\sqrt{x} = 0$ giebt $x = 0$, also auch $y = 0$, dies in $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3a^2}{4\sqrt{(a-x)^5x}}$ (§ 11 pg. 14) substituiert giebt

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3a^2}{0} = \infty$, also findet für diesen Fall kein Maximum oder Minimum statt.

b, $3a - 2x = 0$, $x = \frac{3}{2}a$ giebt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3a^2}{4\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^5\frac{3}{2}a}} = \frac{3a^2}{4\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^6 3(-1)}} = \frac{3a^2}{4\left(\frac{a}{2}\right)^3\sqrt{3}\sqrt{-1}} = \frac{6}{a\sqrt{3}\sqrt{-1}};$$

dies ist imaginär, giebt also auch kein Maximum oder Minimum; das Imaginäre kommt daher, dass $x = \frac{3}{2}a$ gesetzt ist, während es doch höchstens $= a$ sein darf.

Ferner ist $\frac{dx}{dy} = \frac{2(a-x)^{\frac{3}{2}}}{(3a-2x)\sqrt{x}}$.

Setzen wir $\frac{dx}{dy} = 0$, so wird

$a - x = 0$, d. h. $a = x$, dann ist $y = \infty$.

Setzen wir $x = a$ in $\frac{d^2y}{dx^2}$ ein, so wird dies $= \frac{3a^2}{0} = \infty$, also auch hier kein Maximum oder Minimum.

Um zu untersuchen, ob die Cissoide ausgezeichnete Puncte habe, müssen wir den wahren Werth von $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ bestimmen.

Es war $\frac{dy}{dx} =$ (§ 11 pg. 14) $\frac{(a-x)3x^2+x^3}{2(a-x)^2y} = \frac{x^3}{2(a-x)^2y} + \frac{3x^2}{2(a-x)y} = \frac{y^2+3x^2}{2(a-x)y}$

Soll nun $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ werden, so muss $y^2 + 3x^2 = 0$ und $2(a-x)\,y = 0$ sein; die einzigen reellen Werthe sind hier $x = 0$ und $y = 0$;
demnach könnte der Anfangspunct der Coordinaten ein vielfacher oder conjugirter Punct sein; da aber die Curve blos auf der Seite der $+ X$ Axe sich befindet, so ist er ein Rückkehrpunct und zwar der ersten Art, weil der wahre Werth von $\frac{dy}{dx}$ für $x = 0$, wie sich aus der Form pg. 14 ergiebt, $= 0$ ist, die Tangente also mit der Abscissenaxe zusammenfällt und die Curve ober- und unterhalb derselben liegt.

Da $\frac{d^2y}{dx^2}$ für keinen endlichen Werth von x zu 0 wird und da für $x = a$, wofür $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$ ist, auch $y = \infty$ wird, so hat die Cissoide keinen Inflexionspunct.

§. 18. *Krümmungsradius der Cissoide.*

Für eine Curve $y = f(x)$ ist der Krümmungsradius

$$\varrho = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Für die Cissoide ist

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{(3a-2x)^2 x}{4(a-x)^3} = \frac{4a^3 - 12a^2x + 12ax^2 - 4x^3 + 9a^2x - 12ax^2 + 4x^3}{4(a-x)^3}$$

$$= \frac{4a^3 - 3a^2x}{4(a-x)^3} = \frac{a^2(4a-3x)}{4(a-x)^3}$$

$$\text{folgl. } \varrho = \left\{\frac{a^2(4a-3x)}{4(a-x)^3}\right\}^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{4(a-x)^{\frac{5}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{3a^2} = \frac{(4a-3x)^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{6(a-x)^2} = \frac{a(4a-3x)\sqrt{(4a-3x)x}}{6(a-x)^2}$$

Für a = 1 wird

x	ϱ	lg ϱ
0	0	—
0,25	$\frac{13\sqrt{13}}{54} = 0{,}8680032$	0,9385213—1
0,5	$\frac{5\sqrt{5}}{6} = 1{,}86339$	0,2703037
0,75	$\frac{7\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = 5{,}346338$	0,7280564
1	∞	∞

§. 19. *Evolute der Cissoide.*

Der geometrische Ort für die Mittelpuncte sämmtlicher Krümmungskreise einer Curve, d. h. die *Evolute*, wird, wenn y = f (x) die Gleichung der Curve, x y die Coordinaten eines Punctes derselben, $\alpha\,\beta$ die Coordinaten des zugehörigen Krümmungsmittelpunctes bezogen auf dasselbe System sind, durch die Gleichungen bestimmt

$$f(x,y) = 0$$

$$(y-\beta)\frac{dy}{dx} + x - \alpha = 0$$

$$(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0.$$

aus denen x und y zu eliminieren ist.

Für die Evolute der Cissoide erhalten wir also die 3 Gleichungen

$$\text{I, } y^2 = \frac{x^3}{a-x}$$

$$\text{II, } (y-\beta)\frac{(3a-2x)\sqrt{x}}{2(a-x)^{\frac{3}{2}}} + x - \alpha = 0$$

$$\text{III, } (y-\beta)\frac{3a^2}{4(a-x)^{\frac{5}{2}}\sqrt{x}} + \frac{3a-2x)^2 x}{4(a-x)^3} + 1 = 0.$$

Eliminieren wir zunächst aus II und III $y-\beta$

$$\begin{array}{ll|l} & & \text{multipliciert mit} \\ \text{II,} & (y-\beta)\dfrac{(3a-2x)\sqrt{x}}{2(a-x)^{\frac{3}{2}}} + x - \alpha = 0 & -\dfrac{3a^2}{2(a-x)\sqrt{x}} \\ \text{III,} & (y-\beta)\dfrac{3a^2}{4(a-x)^{\frac{5}{2}}\sqrt{x}} + \dfrac{(3a-2x)^2x}{4(a-x)^3} + 1 = 0 & +(3a-2x)\sqrt{x} \\ \hline & & \text{und addiert} \end{array}$$

$$\frac{(3a-2x)^3x^{\frac{3}{2}}}{4(a-x)^3} + (3a-2x)\sqrt{x} - \frac{3a^2(x-\alpha)}{2(a-x)\sqrt{x}} = 0, \text{ mit } 4(a-x)^3\sqrt{x} \text{ multipliciert}$$

$$(3a-2x)^3x^2 + 4(a-x)^3(3a-2x)x - 6a^2(a-x)^2(x-\alpha) = 0$$

$$(3a-2x)^3x^2 + \{(12a-8x)(ax-x^2) - 6a^2(x-\alpha)\}(a-x)^2 = 0$$

$$(3a-2x)^3x^2 + (6a^2x - 20ax^2 + 8x^3 + 6a^2\alpha)(a^2-2ax+x^2) = 0$$

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} 27a^3x^2 & -54a^2x^3 & +36ax^4 & -8x^5 & \\ -20 & +8 & -16 & & +6a^4x + 6a^4\alpha - 12a^3\alpha x + 6a^2\alpha x^2 \\ -12 & +40 & & & \\ & +6 & -20 & +8 & \\ \hline \end{array}$$

$$-5a^3x^2 + 6a^4x + 6a^4\alpha - 12a^3\alpha x + 6a^2\alpha x^2 = 0$$

$$(-5a^3 + 6a^2\alpha)x^2 + (6a^4 - 12a^3\alpha)x + 6a^4\alpha = 0$$

$$\text{IV,}\quad (-5a + 6\alpha)x^2 + 6a(a-2\alpha)x + 6a^2\alpha = 0$$

Setzen wir jetzt in III den Werth für y, so erhalten wir

$$\left\{\frac{x^{\frac{3}{2}}}{(a-x)^{\frac{1}{2}}} - \beta\right\}\frac{3a^2}{4(a-x)^{\frac{5}{2}}\sqrt{x}} + \frac{(3a-2x)^2x}{4(a-x)^3} + 1 = 0$$

$$\left\{x^{\frac{3}{2}} - (\alpha-x)^{\frac{1}{2}}\beta\right\}3a^2 + (3a-2x)^2x^{\frac{3}{2}} + 4(a-x)^3\sqrt{x} = 0$$

$$\{3a^2x + (3a-2x)^2x + 4(a-x)^3\}\sqrt{x} = 3a^2(a-x)^{\frac{1}{2}}\beta$$

$$\left[\begin{array}{l|l|l|l} 3a^2x & -12ax^2 & +4x^3 & +4a^3 \\ +9 & & & \\ -12 & +12 & -4 & \end{array}\right]\sqrt{x} = 3a^2(a-x)^{\frac{1}{2}}\beta$$

$$4a^3\sqrt{x} = 3a^2(a-x)^{\frac{1}{2}}\beta,\quad 16a^2x = 9(a-x)\beta^2,$$

$$(16a^2 + 9\beta^2)x = 9a\beta^2,\quad x = \frac{9a\beta^2}{16a^2 + 9\beta^2}$$

Setzen wir diesen Werth für x in IV ein, so erhalten wir

$$(-5a + 6\alpha)\frac{81a^2\beta^4}{(16a^2+9\beta^2)^2} + 6a(a-2\alpha)\frac{9a\beta^2}{16a^2+9\beta^2} + 6a^2\alpha = 0$$

$$(-5a+6\alpha)81a^2\beta^4 + 6a(a-2\alpha)9a\beta^2(16a^2+9\beta^2) + 6a^2\alpha(16a^2+9\beta^2)^2 = 0$$

$$(-5a+6\alpha)27\beta^4 + 18(a-2\alpha)(16a^2+9\beta^2)\beta^2 + 2\alpha(16a^2+9\beta^2)^2 = 0$$

$$\begin{array}{l|l|l|l}
-135\,a\,\beta^4 + 162\,\alpha\,\beta^4 & + 288\,a^3\beta^2 - 576\,a^2\,\alpha\,\beta^2 & + 512\,a^4\,\alpha & \\
+162 & -324 & +576 & \\
 & +162 & & \\
\hline
27\,a\,\beta^4 & + 288\,a^3\beta^2 & + 512\,a^4\,\alpha = 0 &
\end{array}$$

$$\text{V} \quad -512\,a^3\,\alpha = 27\,\beta^4 + 288\,a^2\,\beta^2$$

Da hier α eine ganze rationale Function von β ist, so haben wir die Gleichung einer parabolischen Curve; sie enthält blos gerade Potenzen von β, d. h. die Curve erstreckt sich symmetrisch zu beiden Seiten der X Axe. Da ferner die rechte Seite immer $= +$, so muss auch die linke Seite $= +$, d. h. $\alpha = -$ sein; demnach verläuft die Evolute der Cissoide nur nach der $-$ Seite der X Axe hin.

Oben war $x = \frac{9\,a\,\beta^2}{16\,a^2 + 9\,\beta^2}$; wird $x = 0$, so wird auch $\beta = 0$, folglich $-512\ a^4\ \alpha = 0$, d. h. $\alpha = 0$; wird $x = a$, so wird in $\frac{16\,a^2\,x}{9(a-x)} = \beta^2$ die linke Seite $= \infty$, also $\beta = \infty$, also $\alpha = -\infty$.

Hieraus folgt, dass die Evolute der Cissoide eine parabolische Curve ist, welche vom Anfangspuncte der Coordinaten aus nach der $-$ Seite der X Axe zu beiden Seiten derselben bis ins Unendliche sich erstreckt.

Um die weitern Eigenschaften dieser Curve zu untersuchen, differenziieren wir ihre Gleichung; dies giebt

$$4.\,27\,\beta^3\,\frac{d\beta}{d\alpha} + 2.\,288\,a^2\,\beta\,\frac{d\beta}{d\alpha} = -512\,a^3$$

$$(27\,\beta^3 + 144\,a^2\beta)\,\frac{d\beta}{d\alpha} = -128\,a^3;$$

nennen wir also den Winkel, den die Tangente mit der X Axe bildet, φ, so ist

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{128\,a^3}{\beta\,(27\,\beta^2 + 144\,a^2)}$$

$$S = \beta\,\frac{d\alpha}{d\beta} = -\frac{\beta^2\,(27\,\beta^2 + 144\,a^2)}{128\,a^3}$$

$$Sn = \beta\,\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{128\,a^3}{27\,\beta^2 + 144\,a^2}$$

$$T = \beta\sqrt{1+\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)^2} = \beta\sqrt{1+\frac{27^2\beta^6 + 2.\,27.\,144\,a^2\beta^4 + 144^2a^4\beta^2}{128^2\,a^6}}$$

$$N = \beta\sqrt{1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2} = \beta\sqrt{1+\frac{128^2\,a^6}{27^2\beta^6 + 2.\,27.\,144\,a^2\beta^4 + 144^2a^4\beta^2}}$$

Mit Hilfe von S lässt sich nun an jeden Punct der Evolute die Tangente ziehen. Wir wollen für einige specielle Werthe S und φ berechnen, wobei $a = 1$ sein mag.

β	lg S neg.	S	lg tg φ neg.	tg φ	φ
0	—	0	—	$-\infty$	270° 0′ 0″
0,5	0,4689873—1	—0,2944334	0,2299827	—1,698176	300° 29 33
1	0,1257861	—1,335937	0,8742139—1	—0,7485381	323 11 2
1,5	0,5561964	—3,599121	0,6198948—1	—0,4167685	337 22 31
2	0,8962505	—7,874998	0,4047795—1	—0,2539682	345 45 0
∞	—	$-\infty$	—	0	360 0 0

Die Winkel der Tangente mit der X Axe liegen also zwischen 270° und 360°, die Tangente steht demnach im Anfangspuncte senkrecht auf der X Axe, für den unendlich weit liegenden Punct ist sie ihr parallel.

Um die Lage der Curve gegen die Coordinatenaxen zu bestimmen brauchen wir noch $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$ und $\frac{d^2\alpha}{d\beta^2}$.

$$\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = \frac{-128\,a^3\left\{-81\,\beta^2\frac{d\beta}{d\alpha} - 144\,a^2\frac{d\beta}{d\alpha}\right\}}{(27\,\beta^3 + 144\,a^2\,\beta)^2} = \frac{128\,a^3\,(81\,\beta^2 + 144\,a^2)\frac{d\beta}{d\alpha}}{(27\,\beta^3 + 144\,a^2\,\beta)^2}$$

$$= \frac{128\,a^3(81\,\beta^2 + 144\,a^2)(-128\,a^3)}{(27\,\beta^3 + 144\,\alpha^2\,\beta)^3} = \frac{-128^2\,a^6\,(81\,\beta^2 + 144\,a^2)}{(27\,\beta^3 + 144\,a^2\,\beta)^2}$$

Das Zeichen hängt bloss vom Divisor ab, also wird für $\beta = \pm$ $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = \mp$, d. h. die Curve kehrt der X Axe die concave Seite zu.

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{-(27\,\beta^3 + 144\,a^2\,\beta)}{128\,a^3}$$

$$\frac{d^2\alpha}{d\beta^2} = \frac{-(3.27\,\beta^2 + 144\,a^2)}{128\,a^3} = \frac{-(81\,\beta^2 + 144\,a^2)}{128\,a^3},$$

folglich ist $\frac{d^2\alpha}{d\beta^2} = -$, d. h. die Curve kehrt der Y Axe die convexe Seite zu.

Um nun zu sehen, ob die Curve ein Maximum oder Minimum hat, untersuchen wir $\frac{d\beta}{d\alpha}$ und $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$.

Setzen wir $\frac{d\beta}{d\alpha} = \infty$, so wird $\beta = 0$ oder $\beta^2 = \frac{-144\,a^2}{27}$, d. h. β imaginär.

Für $\frac{d\beta}{d\alpha} = 0$ wird $-\ 128\,a^3 = 0$, dies geht nicht, also hat die Curve kein Maximum oder Minimum.

Ferner wird $\frac{d\beta}{d\alpha}$ für keinen Werth von $\beta = \frac{0}{0}$, folglich hat die Curve auch keinen vielfachen Punct.

Da nun auch für keinen endlichen Werth von β $\frac{d^2\alpha}{d\beta^2} = 0$ oder $= \infty$ wird, so ist auch kein Inflexionspunct vorhanden.

Um den Lauf der Curve näher beurtheilen zu können, wollen wir eine Anzahl Werthe der Coordinaten berechnen. Dabei ist $a = 1$ gesetzt, so dass

$$0{,}052734375\,\beta^4 + 0{,}5625\,\beta^2 = -\alpha \text{ wird.}$$

Setzen wir allgemein $\beta = \frac{m}{n}\,a$, so erhalten wir

$$0{,}052734375 \left(\frac{m}{n}\right)^4 a^4 + 0{,}5625 \left(\frac{m}{n}\right)^2 a^4 = -a^3\alpha, \text{ oder}$$

$$-\alpha = \left\{0{,}052734375 \left(\frac{m}{n}\right)^4 + 0{,}5625 \left(\frac{m}{n}\right)^2\right\} a$$

β	$-\alpha$	β	$-\alpha$	β	$-\alpha$
0	0	1	0,6152344	2	3,09375
0,1	0,0056303	1,1	0,7578342	2,3094011	4,5000035
0,2	0,0225844	1,2	0,9193497	3	6,3339844
0,3	0,0510521	1,3	1,1012399	4	22,5
0,4	0,0913500	1,333	1,1666664	5	47,0214844
0,5	0,1439209	1,4	1,3050841	6	88,59375
0,6	0,2093344	1,5	1,532593	7	154,1777344
0,7	0,2882865	1,6	1,7856001	8	252
0,7698004	0,3518518	1,7	2,0660674	9	391,5527344
0,8	0,3816	1,8	2,3760844	10	583,59375
0,9	0,490224	1,9	2,7178645	∞	∞

Um zu übersehen, in welchem Verhältniss die Coordinaten der Cissoide zu denen ihrer Evolute stehn, wollen wir einige Werthe berechnen.

Für $a = 1$ ist

$$\left\{\frac{x^{\frac{3}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} - \beta\right\} \frac{3}{4(1-x)^{\frac{5}{2}} x^{\frac{1}{2}}} + \frac{(3-2x)^2 x}{4(1-x)^3} + 1 = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{3x^{\frac{3}{2}} + (3-2x)^2 x^{\frac{3}{2}} + 4(1-x)^3 x^{\frac{1}{2}}}{3(1-x)^{\frac{1}{2}}} = \beta$$

Mit Hilfe dieser Gleichung erhalten wir

x	β
0	0
0,25	$\frac{4}{3\sqrt{3}} = 0{,}7698004$
0,5	$\frac{4}{3} = 1{,}333\ldots$
0,75	$\frac{4}{\sqrt{3}} = 2{,}3094011$
1	∞

§. 20. *Evolvente der Cissoide.*

Umgekehrt können wir uns auch die Cissoide als abgewickelte Curve denken. Nennen wir die Coordinaten eines Punctes der Cissoide als Krümmungsmittelpunct α β und die Coordinaten des zugehörigen Punctes der Evolente x y, so haben wir

$$\text{I,}\ \beta^2 = \frac{\alpha^3}{a-\alpha}$$

$$\text{II,}\ (y-\beta)\frac{dy}{dx} + x - \alpha = 0$$

$$\text{III,}\ \frac{d\beta}{d\alpha}\frac{dy}{dx} + 1 = 0,$$

woraus α und β zu eliminieren ist.

Aus I folgt $2\beta\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{3(a-\alpha)\alpha^2 + \alpha^3}{(a-\alpha)^2} = \frac{(3a-2\alpha)\alpha^2}{(a-\alpha)^2}$, d. h. $\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{(3a-2\alpha)\alpha^2}{2\beta(a-\alpha)^2}$,

ferner sei $\frac{dy}{dx} = p$, dann wird

$$\text{II,}\ (y-\beta)p + x - \alpha = 0$$

$$\text{III,}\ \frac{\alpha^2(3a-2\alpha)}{2\beta(a-\alpha)^2}p + 1 = 0 \text{ oder}$$

$$\begin{array}{l|l} & \text{multipliziert mit} \\ -\beta p + yp + x - \alpha = 0 & 2(a-\alpha)^2 \\ 2\beta(a-\alpha)^2 + \alpha^2(3a-2\alpha)p = 0 & p \\ \hline & \text{addiert} \end{array}$$

$$\text{IV,}\ 2(a-\alpha)^2(x-\alpha) + 2y(a-\alpha)^2p + \alpha^2(3a-2\alpha)p^2 = 0$$

$$(2a^2 - 4a\alpha + 2\alpha^2)(x-\alpha) + 2a^2yp - 4a\alpha yp + 2\alpha^2yp + 3a\alpha^2p^2 - 2\alpha^3p^2 = 0$$

$$2(1+p^2)\alpha^3 - (4a+2x+2yp+3ap^2)\alpha^2 + 2a(2x+a+2yp)a - 2a^2(x+yp) = 0$$

$$\text{III,}\ 2\beta(a-\alpha)^2 + \alpha^2(3a-2\alpha)p = 0$$

$$2\frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{(a-\alpha)^{\frac{1}{2}}}(a-\alpha)^2 + \alpha^2(3a-2\alpha)p = 0$$

$$2(a-\alpha)^{\frac{3}{2}} + \alpha^{\frac{1}{2}}(3a-2\alpha)p = 0$$

$$4(a-\alpha)^3 = \alpha(3a-2\alpha)^2 p^2$$

$$4a^3 - 12a^2\alpha + 12a\alpha^2 - 4\alpha^3 = 9a^2\alpha p^2 - 12a\alpha^2 p^2 + 4\alpha^3 p^2$$

$$4(1+p)^2\alpha^3 - 12a(1+p^2)\alpha^2 + 3a^2(4+3p^2)\alpha - 4a^3 = 0$$ davon

$$4(1+p^2)\alpha^3 - (8a+4x+4yp+6ap^2)\alpha^2 + 4a(2x+a+2yp)\alpha - 4a^2(x+yp) = 0$$

subtrahiert

V, $$(8a+4x+4yp+6ap^2-12a-12ap^2)\alpha^2 - (4a^2+8ax+8ayp-12a^2-9a^2p^2)\alpha + 4a^2x + 4a^2yp - 4a^3 = 0$$

$$2(2x+2yp-3ap^2-2a)\alpha^2 - a(8x+8yp-8a-9ap^2)\alpha + 4a^2(x+yp-a) = 0$$

multipliziert mit

III, $$4(1+p^2)\alpha^3 - 12a(1+p^2)\alpha^2 + 3a^2(4+3p^2)\alpha - 4a^3 = 0$$ | $x+yp$

IV, $$2(1+p^2)\alpha^3 - (4a+2x+2yp+3ap^2)\alpha^2 + 2a(a+2x+2yp)\alpha - 2a^2(x+yp) = 0$$ | $-2a$

addiert

VI, $$\{4(1+p^2)(x+yp) - 4a(1+p^2)\}\alpha^3 - \{12a(1+p^2)(x+yp) - 2a(4a+2x+2yp+3ap^2)\}\alpha^2 + \{3a^2(4+3p^2)(x+yp) - 4a^2(a+2x+2yp)\}\alpha = 0$$

$$4(1+p^2)(x+yp-a)\alpha^2 - 2a\{6x+6p^2x+6yp+6yp^3-4a-2x-2yp-3ap^2\}\alpha + a^2\{12x+9p^2x+12yp+9yp^3-4a-8x-8yp\} = 0$$

$$4(1+p^2)(x+yp-a)\alpha^2 - 2a\{4x+6p^2x+4yp+6yp^3-4a-3ap^2\}\alpha + a^2\{4x+9p^2x+4yp+9yp^3-4a\} = 0$$

VI, $$4(1+p^2)(x+yp-a)\alpha^2 - 2a\{6yp^3+6xp^2-3ap^2+4yp+4x-4a\}\alpha + a^2 + \{9yp^3\ 9xp^2+4yp+4x-4a\} = 0$$

V, $$2\{2(x+yp-a)-3ap^2\}\alpha^2 - a\{-9ap^2+8yp+8x-8a\}\alpha + 4a^2(x+yp-a) = 0$$

VI, $$4(1+p^2)(x+yp-a)\alpha^2 - 2a\{(6p^2+4)(yp+x-a)+3ap^2\}\alpha + a^2\{(9p^2+4)(yp+x-a)+9ap^2\} = 0$$

V, $$2\{2(x+yp-a)-3ap^2\}\alpha^2 - a\{8(yp+x-a)-9ap^2\}\alpha + 4a^2(yp+x-a) = 0$$ subtrahiert

VII, $$\{4p^2(x+yp-a)+6ap^2\}\alpha^2 - a\{12(yp+x-a)p^2+15ap^2\}\alpha + a^2\{9p^2(yp+x-a)+9ap^2\} = 0$$

VII, $$2\{2(x+yp)+a\}\alpha^2 - 3a\{4(yp+x)+a\}\alpha + 9a^2(yp+x) = 0$$

V, $$2\{2(x+yp-a)-3ap^2\}\alpha^2 - a\{8(yp+x-a)-9ap^2\}\alpha + 4a^2(yp+x-a) = 0,$$

multipliziert man VII mit $-\{2(x+yp-a)-3ap^2\}$ und V mit $\{2(x+yp)+a\}$ und addiert, so wird

VIII, $$a\left[\{12(yp+x)+3a\}\{2(yp+x-a)-3ap^2\} - \{8(yp+x-a)-9ap^2\}\{2(yp+x)+a\}\right]\alpha - a^2\left[9(yp+x)\{2(yp+x-a)-3ap^2\} - 4(yp+x-a)\{2(yp+x)+a\}\right] = 0$$

Setzen wir $yp + x = z$, so erhält diese Gleichung die Form

$$\left[(12z+3a)\{2(z-a)-3ap^2\} - \{8(z-a)-9ap^2\}(2z+a)\right]\alpha - a\left[9z\{2(z-a)-3ap^2\} - 4(z-a)(2z+a)\right] = 0$$

$$\{(12z+3a)(2z-2a-3ap^2) - (8z-8a-9ap^2)(2z+a)\}\alpha - a\{9z(2z-2a-3ap^2) - (4z-4a)(2z+a)\} = 0$$

$$\text{VIII,}\quad 2\{z(4z-5a-9ap^2)+a^2\}\,\alpha - a\{z(10z-14a-27ap^2)+4a^2\} = 0$$

	multipliziert mit
VII, $2(2z+a)\alpha^2 - 3a(4z+a)\alpha + 9a^2z = 0$	$4(z-a)$
V, $2\{2(z-a)-3ap^2\}\alpha^2 - a\{8(z-a)-9ap^2\}\alpha + 4a^2(z-a) = 0$	$-9z$ addiert

$$\text{IX,}\quad \left[8(2z+a)(z-a)-18\{2(z-a)-3ap^2\}z\right]\alpha^2 - \left[12a(4z+a)(z-a)-9a\{8(z-a)-9ap^2\}z\right]\alpha = 0$$

$$(-20z^2+28az-8a^2+54ap^2z)\,\alpha - 3a(-8z^2+12az-4a^2+27ap^2z) = 0$$

	multipliziert mit
VIII, $2\{z(4z-5a-9ap^2)+a^2\}\alpha - a\{z(10z-14a-27ap^2)+4a^2\} = 0$	$-\{z(10z-14a-27ap^2)+4a^2\}$
IX, $2\{z(10z-14a-27ap^2)+4a^2\}\alpha - 3a\{z(8z-12a-27ap^2)+4a^2\} = 0$	$\{z(4z-5a-9ap^2)+a^2\}$ addiert

$$\text{X,}\quad a\{z(10z-14a-27ap^2)+4a^2\}^2 - 3a(8z^2-12az-27ap^2z+4a^2)(4z^6-5az-9ap^2z+a^2) = 0$$

$$4z^4-16az^3+27a^2p^2z^2+24a^2z^2-16a^3z-27a^3p^2z+4a^4 = 0$$

$$(2z^2-4(az+2a^2)^2+27a^2p^2z^2-27a^3p^2z = 0$$

$$4(z-a)^4+27a^2p^2z(z-a) = 0$$

$$(z-a)\{4(z-a)^3+27a^2p^2z\} = 0$$

Dieser Gleichung kann genügt werden durch

a, $z-a=0$ oder b, $4(z-a)^3+27a^2p^2z=0$

a, $z-a=0$, d. h. $yp+x=a$, $y\,dy+x\,dx=a\,dx$, $\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}=ax$, $y^2=2ax-x^2$

Dies ist die Gleichung eines Kreises, der mit dem Radius a vom Anfangspuncte der Coordinaten als Mittelpunct beschrieben wird.

Die Gleichung der Evolvente muss also im andern Factor enthalten sein.

b, $4(z-a)^3+27a^2p^2z=0$

Ordnet man diese Gleichung nach p, so erhält man

$$4(yp+x)^3-12a(yp+x)^2+12a^2(yp+x)-4a^3+27a^2p^2(yp+x) = 0$$

$$\begin{array}{l} 4y^3p^3+12xy^2p^2+12x^2yp+4x^3 \\ -12ay^2p^2-24axyp \quad -12ax^2 \\ +27a^2yp^3+27a^2xp^2+12a^2yp \quad +12a^2x-4a^3 \end{array}$$

$$y(4y^2+27a^2)p^3+3(4xy^2-4ay^2+9a^2x)p^2+12y(x^2-2ax+a^2)p+4x^3-12ax^2+12a^2x-4a^3 = 0$$

$$y(4y^2+27a^2)p^3+3\{4y^2(x-\alpha)+9a^2x\}p^2+12y(x-a)^2p+4(x-a)^3 = 0$$

Um diesc Gleichung aufzulösen, haben wir dieselbe erst zu reducieren.

$$p^3+\frac{3\{4y^2(x-a)+9a^2x\}}{y(4y^2+27a^2)}p^2+\frac{12y(x-a)^2}{y(4y^2+27a^2)}p+\frac{4(x-a)^3}{y(4y^2+27a^2)} = 0$$

Diese Gleichung ist von der Form

$$p^3+Ap^2+Bp+C=0$$

Setzen wir hierin $p=u+k$ so wird, damit Ap^2 verschwindet, $k=-\frac{A}{3}$ folglich unsre Gleichung

$$u^3 + \left(B - \frac{A^2}{3}\right) u + \left(\frac{2A^3}{27} - \frac{AB}{3} + C\right) = 0$$

$$B - \frac{A^2}{3} = \frac{12(x-a)^2}{4y^2+27a^2} - \frac{3\{4y^2(x-a)+9a^2x\}^2}{y^2(4y^2+27a^2)^2} = \frac{12y^2(x-a)^2(4y^2+27a^2) - 3\{4y^2(x-a)+9ax^2\}^2}{y^2(4y^2+27a^2)^2}$$

$$= \frac{(x-a)^2(48y^4+12.27a^2y^2-48y^4) - 3.72a^2(x-a)xy^2 - 3.81a^4x^2}{y^2(4y^2+27a^2)^2}$$

$$= \frac{27a^2\{4(x-a)(x-3a)y^2 - 9a^2x^2\}}{y^2(4y^2+27a^2)^2}.$$

Ferner wird

$$\frac{2A^3}{27} - \frac{AB}{3} + C = \frac{2\{4y^2(x-a)+9a^2x\}^3}{y^3(4y^2+27a^2)^2} - \frac{\{4y^2(x-a)+9a^2x\}\,12(x-a)^2}{y(4y^2+27a^2)^2} + \frac{4(x-a)^3}{y(4y^2+27a^2)} =$$

$$\frac{2\{4y^2(x-a)+9a^2x\}^3 - 12(x-a)^2y^2(4y^2+27a^2)\{4y^2(x-a)+9a^2x\} + 4y^2(4y^2+27a^2)^2(x-a)^3}{y^3(4y^2+27a^2)^3}$$

$$= \frac{108a^3y^2(x-a)^2(4y^2-27a^2) + 486a^4x^2\{4y^2(x-a)+3a^2x\}}{y^2(4y^2+27a^2)^3}$$

Unsere Gleichung heisst also jetzt

$$u^3 + \frac{27a^2\{4(x-a)(x-3a)y^2 - 9a^2x^2\}}{y^2(4y^2+27a^2)^2}\,u$$
$$+ \frac{108a^3y^2(x-a)^2(4y^2-27a^2) + 486a^2x^2\{4y^2(x-a)+3a^2x\}}{y^3(4y^2+27a^2)^3} = 0$$

Da dieselbe von der Form ist

$$u^3 + Mu + N = 0,$$

so könnten wir sie nun mit Hilfe der Cardan'schen Formel weiter reducieren und so einen Werth für u, also auch für p, d. h. für $\frac{dy}{dx}$ finden; allein das Resultat ist so compliciert, dass es nicht der Mühe lohnt, dasselbe weiter zu verfolgen.

§. 21. *Rectification der Cissoide.*

Setzen wir den Bogen der Cissoide = s, so ist

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\sqrt{\frac{a^2(4a-3x)}{4(a-x)^3}} = dx\frac{a}{2(a-x)}\sqrt{\frac{4a-3x}{a-x}},\ \text{also}$$

$$s = \int \frac{a}{2(a-x)}\sqrt{\frac{4a-3x}{a-x}}\,.\,dx$$

Es sei nun $\sqrt{\frac{4a-3x}{a-x}} = z$, so wird

$$4a-3x = az^2 - xz^2,\ (z^2-3)x = a(z^2-4),\ x = \frac{a(z^2-4)}{z^2-3},\ \text{also}$$

$$dx = \frac{(z^2-3)\,a\,2z - a(z^2-4)\,2z}{(z^2-3)^2}\,dz = \frac{2az(z^2-3-z^2+4)}{(z^2-3)^2}\,dz = \frac{2az}{(z^2-3)^2}\,dz,\ \text{folgl.}$$

$$s = \int \frac{a}{2\left\{a - \frac{a(z^2-4)}{z^2-3}\right\}} z \frac{2az}{(z^2-3)^2} dz = \int \frac{a(z^2-3)2az^2}{2(az^2-3a-az^2+4a)(z^2-3)^2} dz = \int \frac{az^2}{z^2-3} dz:$$

Da aber $\frac{az^2}{z^2-3} = a + \frac{3a}{z^2-3}$, folgl.

$$s = \int a\,dz + \int \frac{3a}{z^2-3} dz = az + 3a \int \frac{dz}{(z+\sqrt{3})(z-\sqrt{3})}$$

Setzen wir nun $\frac{1}{(z+\sqrt{3})(z-\sqrt{3})} = \frac{\alpha}{z+\sqrt{3}} + \frac{\beta}{z-\sqrt{3}}$, so wird

$1 = \alpha z - \alpha\sqrt{3} + \beta z + \beta\sqrt{3}$, d. h. $1 = (\alpha+\beta)z + (\beta-\alpha)\sqrt{3}$, woraus

$\alpha+\beta = 0$ und $-\alpha+\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, also

$\beta = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ und $\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$ folgt.

Dadurch erhalten wir

$$s = az + \frac{3a}{2\sqrt{3}}\int\frac{dz}{z-\sqrt{3}} - \frac{3a}{2\sqrt{3}}\int\frac{dz}{z+\sqrt{3}} = az + \frac{3a}{2\sqrt{3}} \lg nat(z-\sqrt{3}) - \frac{3a}{2\sqrt{3}} \lg nat(z+\sqrt{3})$$

$$= az + \frac{3a}{2\sqrt{3}} \lg nat \frac{z-\sqrt{3}}{z+\sqrt{3}} + C.$$

Für $x = 0$ ist $s = 0$ und $z = 2$, folgl.

$-C = 2a + \frac{3a}{2\sqrt{3}} \lg nat \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$, also der vom Scheitel an gerechnete Bogen der Cissoide

$$s = a(z-2) + \frac{3a}{2\sqrt{3}}\left\{\lg nat \frac{z-\sqrt{3}}{z+\sqrt{3}} - \lg nat \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right\}$$

$$= a(z-2) + \frac{3a}{2\sqrt{3}} \lg nat \frac{(z-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(z+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$$

$$s = a\left\{\sqrt{\frac{4a-3x}{a-x}} - 2\right\} + \frac{a}{2}\sqrt{3} \lg nat \frac{(2+\sqrt{3})\left(\sqrt{\frac{4a-3x}{a-x}} - \sqrt{3}\right)}{(2-\sqrt{3})\left(\sqrt{\frac{4a-3x}{a-x}} + \sqrt{3}\right)}$$

$$= a\left\{\sqrt{\frac{4a-3x}{a-x}} - 2\right\} + \frac{a}{2}\sqrt{3} \lg nat \frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{4a-3x} - \sqrt{3(a-x)})}{(2-\sqrt{3})(\sqrt{4a-3x} + \sqrt{3(a-x)})}$$

Integriert man allgemein zwischen den Grenzen x_1 und x_2, so erhält man

$$s = a\left\{\sqrt{\frac{4a-3x_2}{a-x_2}} - \sqrt{\frac{4a-3x_1}{a-x_1}}\right\}$$

$$+ \frac{a}{2}\sqrt{3}\left\{\lg nat \frac{\sqrt{4a-3x_2} - \sqrt{3(a-x_2)}}{\sqrt{4a-3x_2} + \sqrt{3(a-x_2)}} - \lg nat \frac{\sqrt{4a-3x_1} - \sqrt{3(a-x_1)}}{\sqrt{4a-3x_1} + \sqrt{3(a-x_1)}}\right\}$$

$$= a \left\{ \sqrt{\frac{4a-3x_2}{a-x_2}} - \sqrt{\frac{4a-3x_1}{a-x_1}} \right\}$$

$$+ \frac{a}{2} \sqrt{3} \text{ lg nat } \frac{(\sqrt{4a-3x_2} - \sqrt{3(a-x_2)})\,(\sqrt{4a-3x_1} + \sqrt{3(a-x_1)})}{(\sqrt{4a-3x_2} + \sqrt{3(a-x_2)})\,(\sqrt{4a-3x_1} - \sqrt{3(a-x_1)})}$$

Will man den innerhalb des Erzeugungskreises liegenden Bogen s′ der Cissoide berechnen, so hat man von $x = 0$ bis $x = \frac{a}{2}$ zu integrieren und erhält

$$s' = a \left\{ \sqrt{\frac{4a - \frac{3}{2}a}{\frac{a}{2}}} - 2 \right\} + \frac{a}{2} \text{ lg nat } \frac{(2+\sqrt{3})\left(\sqrt{4a - \frac{3}{2}a} - \sqrt{3\frac{a}{2}}\right)}{(2-\sqrt{3})\left(\sqrt{4a - \frac{3}{2}a} + \sqrt{3\frac{a}{2}}\right)}$$

$$= a(\sqrt{5} - 2) + \frac{a}{2}\sqrt{3} \text{ lg nat } \frac{(2+\sqrt{3})\,(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})\,(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$$

Etwas anders gestaltet sich die Formel für s durch folgende Umformung:

$$s = a(z-2) + \frac{a}{2}\sqrt{3} \text{ lg nat } \frac{(2+\sqrt{3})(z-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(z+\sqrt{3})}$$

$$= a(z-2) + a\sqrt{3} \text{ lg nat } \sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})\,(z-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})\,(z+\sqrt{3})}}$$

$$= a(z-2) + a\sqrt{3} \text{ lg nat } \frac{(2+\sqrt{3})\,(z-\sqrt{3})}{\sqrt{(4-3)\,(z^2-3)}}$$

$$= a(z-2) + a\sqrt{3} \text{ lg nat } \frac{(2+\sqrt{3})\,(z-\sqrt{3})}{\sqrt{z^2-3}}$$

$$= a\left\{\sqrt{\frac{4a-3x}{a-x}} - 2\right\} + a\sqrt{3} \text{ lg nat } \frac{(2+\sqrt{3})\left(\sqrt{\frac{4a-3x}{a-x}} - \sqrt{3}\right)}{\sqrt{\frac{4a-3x}{a-x} - 3}}$$

$$= a\left\{\sqrt{\frac{4a-3x}{a-x}} - 2\right\} + a\sqrt{3} \text{ lg nat } \frac{(2+\sqrt{3})\,(\sqrt{4a-3x} - \sqrt{3(a-x)})}{\sqrt{4a-3x-3a+3x}}$$

$$= a\left\{\sqrt{\frac{4a-3x}{a-x}} - 2\right\} + a\sqrt{3} \text{ lg nat } \frac{(2+\sqrt{3})\,(\sqrt{4a-3x} - \sqrt{3(a-x)})}{\sqrt{a}}$$

Bei dieser Form wird

$$s' = a(\sqrt{5} - 2) + a\sqrt{3} \text{ lg nat } \frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{4a - \frac{3}{2}a} - \sqrt{\frac{3a}{2}}}{\sqrt{a}}$$

$$= a(\sqrt{5} - 2) + a\sqrt{3}\ \lg \text{nat} \frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{\sqrt{2}}$$

Fig. 1. **§. 22.** *Quadratur der Cissoide.* Es soll der Inhalt der von der Abscisse AP $= x$, der zugehörigen Ordinate FP $= y$ und dem Bogen AF eingeschlossenen Fläche AFP $= f$ gefunden werden.

$$f = \int y\,dx = \int \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a-x}}\,dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{ax-x^2}}\,dx.$$

Setzen wir hier in der Formel

$$\int \frac{x^q\,dx}{\sqrt{2cx-x^2}} = \frac{-x^{q-1}\sqrt{2cx-x^2}}{q} + \frac{2q-1}{q}\,c\int\frac{x^{q-1}\,dx}{\sqrt{2cx-x^2}}\text{*}$$

$q = 2$, $c = \frac{a}{2}$, so erhalten wir

$$f = \frac{-x\sqrt{ax-x^2}}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{a}{2}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{ax-x^2}} + C.$$

Nun ist $d\sqrt{ax-x^2} = \frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}\,dx$, also

$$\frac{a\,dx}{2\sqrt{ax-x^2}} - d\sqrt{ax-x^2} = \frac{x\,dx}{\sqrt{ax-x^2}},\ \text{folgl.}$$

$$f = \frac{-x\sqrt{ax-x^2}}{2} + \frac{3}{4}a\int -d\sqrt{ax-x^2} + \frac{3}{4}a\int\frac{a\,dx}{2\sqrt{ax-x^2}} + C$$

$$= \frac{-x\sqrt{ax-x^2}}{2} - \frac{3}{4}a\sqrt{ax-x^2} + \frac{3}{8}a^2\int\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} + C$$

$$= \frac{-x\sqrt{ax-x^2}}{2} - \frac{3}{4}a\sqrt{ax-x^2} + \frac{3}{8}a^2\ \text{arc}\left(\sin\text{vers} = \frac{2x}{a}\right) + C$$

$$= -\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}a\right)\sqrt{ax-x^2} + \frac{3}{8}a^2\ \text{arc}\left(\sin\text{vers} = \frac{2x}{a}\right) + C.$$

Für $x = 0$ wird $-\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}a\right)\sqrt{ax-x^2} = 0$ und arc (sin vers $= 0$) auch $= 0$, also $C = 0$, folgl.

$$f = \frac{3}{8}a^2\ \text{arc}\left(\sin\text{vers} = \frac{2x}{a}\right) - \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}a\right)\sqrt{ax-x^2}$$

Zur Bestimmung der Fläche, die im Halbkreise über der Axe liegt, haben wir von $x = 0$ bis $x = \frac{a}{2}$ zu integrieren und erhalten, da für $x = 0$ auch $f = 0$ wird

$$f_{\frac{a}{2}} = \frac{3}{8}a^2\ \text{arc}\,(\sin\text{vers} = 1) - \left(\frac{a}{4} + \frac{3}{4}a\right)\sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{3}{8}a^2\frac{\pi}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{3\pi - 8}{16}a^2$$

---

* Lacroix Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, Paris 1810, §. 402 (tom. II.)

Um die bis ins Unendliche sich erstreckende Fläche zwischen der Axe, Asymptote und einem Cissoidenzweige zu erhalten, müssen wir von $x = 0$ bis $x = a$ integrieren und erhalten

$$\int_a = \frac{3}{8} a^2 \text{ arc } (\sin \text{vers} = 2) - \left(\frac{a}{2} + \frac{3}{4} a\right) \sqrt{a^2 - a^2} = \frac{3}{8} a^2 \pi,$$

folglich ist die gesammte Fläche zwischen der Curve und ihrer Asymptote $= \frac{3}{4} a^2 \pi$, d. h. das dreifache der Fläche des Erzeugungskreises.

Die vom Kreisbogen ALG und vom Cissoidenbogen AFG begrenzte Fläche ist gleich

$$\frac{a^2 \pi}{16} - \frac{3}{16} a^2 \pi + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2 \pi}{8} = \frac{4 - \pi}{8} a^2.$$

Wollen wir endlich die Fläche bestimmen, die zwischen irgend zwei zu x_1 und x_2 gehörigen Ordinaten liegt, so haben wir zwischen den Grenzen x_1 und x_2 zu integrieren und erhalten

$$\int_{x_1}^{x_2} = \frac{3}{8} a^2 \text{ arc } \left(\sin \text{vers} = \frac{2 x_2}{a}\right) - \frac{3}{8} a^2 \text{ arc } \left(\sin \text{vers} = \frac{2 x_1}{a}\right)$$

$$- \left(\frac{x_2}{2} + \frac{3}{4} a\right) \sqrt{a x_2 - x_2^2} + \left(\frac{x_1}{2} + \frac{3}{4} a\right) \sqrt{a x_1 - x_1^2}$$

$$= \frac{3}{8} a^2 \left\{\text{arc } \sin \text{vers} = \frac{2 x_2}{a} - \text{arc } \sin \text{vers} = \frac{2 x_1}{a}\right\} + \left(\frac{x_1}{2} + \frac{3}{4} a\right) \sqrt{a x_1 - x^2}$$

$$- \left(\frac{x_2}{2} + \frac{3}{4} a\right) \sqrt{a x_2 - x_2^2}$$

Oben erhielten wir

$$\int = - \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4} a\right) \sqrt{a x - x^2} + \frac{3}{8} a^2 \frac{dx}{\sqrt{a x - x^2}} + C.$$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a x - x^2}}$ ist aber auch $= \text{arc } \left(\sin = \frac{2}{a} \sqrt{a x - x^2}\right)$, folgl.

$$\int = - \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4} a\right) \sqrt{a x - x^2} + \frac{3}{8} a^2 \text{ arc } \left(\sin = \frac{2}{a} \sqrt{a x - x^2}\right),$$

$$\text{also} \int_{x_1}^{x_2} = \left(\frac{x_1}{2} + \frac{3}{4} a\right) \sqrt{a x_1 - x_1^2} - \left(\frac{x_2}{2} + \frac{3}{4} a\right) \sqrt{a x_2 - x_2^2}$$

$$+ \frac{3}{8} a^2 \left\{\text{arc } \left(\sin = \frac{2}{a} \sqrt{a x_2 - x_2^2}\right) - \text{arc } \left(\sin = \frac{2}{a} \sqrt{a x_1 - x_1^2}\right)\right\}$$

Integriert man hier von $x = 0$ bis $x = \frac{a}{2}$, so erhält man

$$\int_{\frac{a}{2}} = - a \sqrt{\frac{a^2}{4}} + \frac{3}{8} a^2 \text{ arc } \left(\sin = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}}\right)$$

$$= - \frac{a^2}{2} + \frac{3}{8} a^2 \text{ arc } (\sin = 1) = \frac{3 \frac{\pi}{2} - 4}{8} a^2 = \frac{3 \pi - 8}{16} a^2, \text{ wie oben.}$$

Ferner für x = 0 bis x = a erhält man

$$\int_a = -\left(\frac{a}{2}+\frac{3}{4}a\right)\sqrt{a^2-a^2} + \frac{3}{8}a^2 \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{2}{a}\sqrt{a^2-a^2}\right)$$

$$= \frac{3}{8}a^2 \operatorname{arc}(\sin = 0) = \frac{3}{8}a^2\pi, \text{ wie vorhin.}$$

Eine dritte Art der Bestimmung der cissoidalischen Fläche ist folgende:

$$f = \int y\,dx = \int \frac{x^{\frac{3}{2}}}{(a-x)^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int x\sqrt{\frac{x}{a-x}}\,dx$$

Setzen wir hier $x = a\cos^2\varphi$, was immer geschehen kann, da $x \leqq a$, so erhalten wir

$$dx = -2a\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi, \text{ also}$$

$$f = \int a\cos^2\varphi\sqrt{\frac{a\cos^2\varphi}{a-a\cos^2\varphi}}(-2a\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi) = -2a^2\int\cos^4\varphi\,d\varphi.$$

Aber $\cos^4\varphi = \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 = \frac{1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi}{4} = \frac{1+2\cos 2\varphi+\frac{1+\cos 4\varphi}{2}}{4}$

$$= \frac{3+4\cos 2\varphi+\cos 4\varphi}{8}, \text{ folglich}$$

$$f = -\frac{a^2}{4}\int(3+4\cos 2\varphi+\cos 4\varphi)\,d\varphi = -\frac{a^2}{4}\left(3\varphi+2\sin 2\varphi+\frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)+C$$

Für $x=0$ wird $a\cos^2\varphi = 0$, d. h. $\cos\varphi = 0$, also $\varphi = 90^0$, ferner $f = 0$, folgl. $C = \frac{3}{4}a^2\frac{\pi}{2}$, demnach wird das vollständige Integral

$$\int_0^\varphi = \frac{a^2}{4}\left\{3\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)-2\sin 2\varphi-\frac{1}{4}\sin 4\varphi\right\}$$

Setzen wir $x = \frac{a}{2}$, so wird $\frac{a}{2} = a\cos^2\varphi$, $\cos\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\varphi = 45^0 = \frac{\pi}{4}$, also

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} = \int_{\frac{a}{2}} = \frac{a^2}{4}\left(\frac{3\pi}{4}-2\right) = \frac{3\pi-8}{16}a^2, \text{ wie oben.}$$

Setzen wir $x = a$, so wird $a = a\cos^2\varphi$, $\cos\varphi = 1$, $\varphi = 0$, also

$$\int_a = \frac{a^2}{4}\,\frac{3\pi}{2} = \frac{3a^2\pi}{8}, \text{ wie vorhin.}$$

§. 23. *Cubatur der cissoidalischen Rotationskörper.*

a. Die Ebne der Cissoide dreht sich um die X Axe, dann ist der dadurch gebildete Körper

$$K = \int \pi y^2\,dx = \int \pi\frac{x^3}{a-x}\,dx; \text{ aber}$$

$$\frac{x^3}{a-x} = -x^2 - ax - a^2 + \frac{a^3}{a-x}, \text{ folgl.}$$

$$K = \pi \int \left\{ -x^2 dx - ax dx - ax dx - a^2 dx + \frac{a^3}{a-x} dx \right\}$$

$$= -\pi \left\{ \frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} + a^2 x + a^3 \lg \text{nat} \frac{(a-x)}{C^1} \right\} + \pi C$$

für $x = 0$ wird $C = a^3 \lg \text{nat} \frac{a}{C^1}$, folgl.

$$K = \pi \left\{ a^3 \lg \text{nat} \frac{a}{C^1} - \left(\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} + a^2 x + a^3 \lg \text{nat} \frac{(a-x)}{C^1} \right) \right\}$$

$$= \pi \left\{ a^3 \lg \text{nat} \frac{a}{a-x} - \left(\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} + a^2 x \right) \right\}$$

Integrieren wir von $x = 0$ bis $x = \frac{a}{2}$, so erhalten wir

$$K_{\frac{a}{2}} = \pi \left\{ a^3 \lg \text{nat}\, 2 - \left(\frac{a^3}{24} + \frac{a^3}{8} + \frac{a^3}{2} \right) \right\} = \pi \left\{ a^3 \lg \text{nat}\, 2 - \frac{2}{3} a^3 \right\} = a^3 \pi \left(\lg \text{nat}\, 2 - \frac{2}{3} \right)$$

Integrieren wir von $x = 0$ bis $x = a$, so wird

$$K_a = \pi \left\{ a^3 \lg \text{nat} \frac{a}{0} - \left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{2} + a^3 \right) \right\} = \infty$$

b. Die Rotationsaxe sei die Asymptote; die Gleichung der Cissoide war hier für die Asymptote als Abscissenaxe und für die Axe der Cissoide als Ordinatenaxe (§ 12 b)

$$x^2 = \frac{(a-y)^3}{y}, \text{ folglich der Rotationskörper}$$

$$K = \int \pi y^2 dx = \pi \int \left(-y^{\frac{3}{2}} \sqrt{a-y}\, dy - \frac{1}{2} a y^{\frac{1}{2}} \sqrt{a-y}\, dy \right)$$

Aber $-\int y^{\frac{1}{2}} \sqrt{a-y}\, dy$ ist ein Kreissegment, dessen Abscisse $= a - y$, und $\int y^{\frac{3}{2}} \sqrt{a-y}$ lässt sich auf obige Weise leicht auf dasselbe Segment zurückführen.

Setzen wir nämlich

$$\int y^{\frac{3}{2}} \sqrt{a-y}\, dy = (a-y)^{\frac{3}{2}} \left\{ A y^{\frac{3}{2}} + B y^{\frac{1}{2}} \right\} + Q \int y^{\frac{1}{2}} \sqrt{a-y}\, dy,$$

so wird $B = 0$, $A = -\frac{1}{3}$, $Q = \frac{1}{2} a$, folgl.

$$-\int y^{\frac{3}{2}} \sqrt{a-y}\, dy = \frac{1}{3} \sqrt{(ay^3 - y^4)^3} - \frac{1}{2} a \int y^{\frac{1}{2}} \sqrt{a-y}\, dy \text{ und}$$

das vollständige Integral

$$\pi \int a y^{\frac{1}{2}} \sqrt{a-y}\, dy + \frac{1}{3} \sqrt{(ax^3 - y^4)^3}$$

Wird das Segment -- genommen, so ist keine Constante hinzuzufügen.

Wird die Abscisse $= \infty$, so ist der Körper doch endlich; setzen wir nämlich $y = 0$, so verschwindet $\sqrt{(ay^3 - y^4)^3}$ und das subtractive Segment geht über in den Halbkreis; der gesuchte Körper ist also gleich einem Cylinder, welcher zur Höhe den Radius und zur Basis den Erzeugungskreis hat.

§. 24. *Ein Kreis rollt auf der Cissoide, die Bahn eines Punctes in seiner Ebne zu bestimmen.*

Fig. 4. Die Bewegung des Kreises gehe aus vom Anfangspuncte der Coordinaten A, welcher Punct zugleich die Spitze der Cissoide ist, dann hat also die Cissoide mit dem rollenden Kreise im Puncte A eine Berührung 1. Ordnung, die gemeinschaftliche Tangente sei die Y Axe.

Die Gleichung der Cissoide in Bezug auf das feste rechtwinklige System sei $\alpha^2 = \frac{\beta^3}{a - \beta}$, wo mit der Axe der Cissoide die Y Axe zusammenfällt;

Die Gleichung des Kreises in Bezug auf dasselbe System sei für den Radius r

$$\eta^2 + \xi^2 - 2 r \xi = 0.$$

Lassen wir nun den Kreis von links nach rechts fortrollen und fixieren eine beliebige Lage, z. B. die, wo der Berührungspunct B ist, dann ist der Punct A mittlerweile bis A′ gelangt.

Nennen wir nun die Coordinaten des Punctes B in Bezug auf das bewegliche rechtwinklige Coordinatensystem X′ Y′, welches mit dem rollenden Kreise fest verbunden ist und A′ zum Anfangspuncte hat, ξ' η', so gilt für den Punct B offenbar die Gleichung

$$\eta'^2 + \xi'^2 - 2 r \xi' = 0$$

Die Coordinaten von B in Bezug auf das feste System seien α' β';

ferner sei der Winkel, den die für B gemeinschaftliche Tangente mit der festen X Axe bildet, $= \varphi$, der Winkel dieser Tangente mit der beweglichen X′ Axe $= \varphi'$;

Der Punct, welcher die gesuchte Curve beschreibt, sei P, seine Lage gegen das feste Axensystem gegeben durch $AP = c$ und $\angle PAX = \psi$. Nimmt nun dieser Punct in der fixierten Lage des Kreises den Ort P′ ein, so ist offenbar $A'P' = c$, $P'A'X' = \psi$, die Coordinaten endlich dieses beschreibenden Punctes für das feste System seien $x_1\, y_1$.

Ziehen wir nun P′ O, A′ N, BC ⊥ X Axe, P′ M, A′ K, BD ⊥ Y Axe, verlängern A′K und OP′ bis Q, ziehen BF ⊥ X′ Axe, FG ⊥ Y Axe, FE ⊥ BD, endlich UV ⊥ Y Axe und UW ⊥ X Axe, so ist

$$x_1 = P'M = A'Q + A'K$$
$$y_1 = P'O = OQ - P'Q; \text{ aber}$$

$\angle KA'H = RSA' = \varphi_1 + \varphi'_1$, folgl. $A'K = A'H \cos(\varphi_1 + \varphi_1') = A'H \cos \sigma_1$, wenn $\varphi_1 + \varphi_1' = \sigma_1$.

$A'H = A'F - HF = \xi' - HF$, folgl. $A'K = \xi' \cos \sigma_1 - HF \cos \sigma_1 = \xi' \cos \sigma_1 - GF$,

$GF = AC - EB = \alpha' - BF \sin EFB = \alpha' - \eta' \sin (90° - EFA') = \alpha' - \eta' \sin \sigma_1$, folglich

$$A'K = \xi' \cos \sigma_1 - \alpha' + \eta' \sin \sigma_1.$$

Ferner ist $A'Q = A'P' \cos P'A'Q$, und da $QA'X' = 180^0 - QA'S = 180^0 - \sigma_1$ und $QA'X' = P'A'X' - P'A'Q = \psi - P'A'Q$, so wird $180^0 - \sigma_1 = \psi - P'A'Q$, d. h.

$$P'A'Q = -180^0 + (\sigma_1 + \psi) \text{ und da } A'P' = c,$$

$$A'Q = -c \cos(\sigma_1 + \psi), \text{ folglich}$$

$$x_1 = -c \cos(\sigma_1 + \psi) + \xi' \cos \sigma_1 - \alpha' + \eta' \sin \sigma_1 .$$

Zugleich fanden wir oben

$$y_1 = OQ - P'Q = AG - KG - P'Q = BC + EF - KG - P'Q;$$

$$\text{aber } BC = \beta', \; EF = BF \cos \sigma_1 = \eta' \cos \sigma_1,$$

$$KG = KH + HG = A'H \sin \sigma_1 + FH \sin \sigma_1 = A'F \sin \sigma_1 = \xi' \sin \sigma_1,$$

$$P'Q = A'P' \sin P'A'Q = c \sin(\sigma_1 + \psi - 180^0) = -c \sin(\sigma_1 + \psi), \text{ folglich}$$

$$y_1 = \beta' + \eta' \cos \sigma_1 + c \sin(\sigma_1 + \psi)$$

Dieselben Werthe für die Coordinaten des Punctes P' werden wir nun erhalten für jede beliebige Lage von B, so dass wir im Allgemeinen die beiden Gleichungen bekommen

$$x = -\alpha - c \cos(\sigma + \psi) + \xi \cos \sigma + \eta \sin \sigma$$

$$y = \beta + c \sin(\sigma + \psi) - \xi \sin \sigma + \eta \cos \sigma$$

Da nun weiter φ der Winkel ist, den die gemeinschaftliche Tangente mit der X Axe bildet und φ' der Winkel derselden mit der X' Axe, so ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{d\beta}{d\alpha} \text{ und } \operatorname{tg} \varphi' = \frac{d\eta}{d\xi}.$$

Der Kreis soll aber auf der Cissoide fortrollen ohne zu gleiten, es muss also arc AB = arc A'B sein, d. h.

$$\int_0^{\alpha'} \sqrt{1+\left(\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)^2} . \, d\alpha' = \int_0^{\xi'} \sqrt{1+\left(\frac{d\eta'}{d\xi'}\right)^2} . \, d\xi'.$$

Demnach erhalten wir zur Bestimmung von x und y folgende Gleichungen

$$\text{I, } x = -\alpha - c \cos(\sigma + \psi) + \xi \cos \sigma + \eta \sin \sigma$$

$$\text{II, } y = \beta + c \sin(\sigma + \psi) - \xi \sin \sigma + \eta \cos \sigma$$

$$\text{III, } \frac{\beta^3}{a - \beta} = \alpha^2; \qquad \text{IV, } \eta^2 + \xi^2 - 2r\xi = 0$$

$$\text{V, } \operatorname{tg} \varphi = \frac{d\beta}{d\alpha}, \qquad \text{VI, } \operatorname{tg} \varphi' = \frac{d\eta}{d\xi}$$

$$\text{VII } \int_0^{\beta} \sqrt{\left(\frac{d\alpha}{d\xi}\right)^2 + 1} . \, d\beta = \int_0^{\eta} \sqrt{\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^2 + 1} . \, d\eta$$

und haben aus diesen 7 Gleichungen die 6 Grössen α, β, ξ, η, φ, φ' zu eliminieren.

Wir wollen aber zunächst noch eine Vereinfachung vornehmen.

Der rollende Kreis kann nämlich in seiner ursprünglichen Lage jederzeit so gedreht werden,

dass der beschreibende Punct P in die X Axe fällt und $\psi = 180$ wird, dadurch gehen die Gleichungen I und I über in

$$\text{I, } x = -a + c\cos\sigma + \xi\cos\sigma + \eta\sin\sigma$$
$$\text{II, } y = \beta - c\sin\sigma - \xi\sin\sigma + \eta\cos\sigma$$

a. Untersuchen wir nun zunächst den Fall, dass der Mittelpunct des rollenden Kreises der beschreibende ist, dann wird $c = r$, $\psi = 0$, folglich

$$x = -\alpha - r\cos\sigma + \xi\cos\sigma + \eta\sin\sigma$$
$$y = \beta + r\sin\sigma - \xi\sin\sigma + \eta\cos\sigma$$
$$x + \alpha = (\xi - r) + \eta\sin\sigma$$
$$y - \beta = -(\xi - r)\sin\sigma + \eta\cos\sigma$$

$$(x+\alpha)^2 = (\xi - r)^2\cos^2\sigma + 2(\xi - r)\eta\cos\sigma\sin\sigma + \eta^2\sin^2\sigma$$
$$(y-\beta)^2 = (\xi - r)^2\sin^2\sigma - 2(\xi - r)\eta\cos\sigma\sin\sigma + \eta^2\cos^2\sigma$$

$$(x+\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (\xi - r)^2 + \eta^2, \text{ da aber}$$
$$y^2 + \xi^2 - 2r\xi = 0, \text{ so ist}$$
$$(\xi - r)^2 = r^2 - \eta^2, \text{ folgl.}$$
$$(x+\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

Dasselbe Resultat erhält man aber auch durch die unmittelbare Bestimmung der Coordinaten des Mittelpunctes, nämlich

$$x = UV = AC - DB = \alpha - UB\cos DBU$$

Da aber $\angle DBR = \varphi$, so $\cos DBU = \sin\varphi$, also

$$x = \alpha - r\sin\varphi$$
$$y = UW = CB + UD = \beta + r\cos\varphi, \text{ also}$$
$$x - \alpha = -r\sin\varphi$$
$$y - \beta = r\cos\varphi$$

$$(x-a)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

Ferner wird $\frac{x-\alpha}{y-\beta} = -\operatorname{tg}\varphi$ und da nach Gl. V

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{d\beta}{d\alpha}, \text{ so ist}$$
$$x - \alpha = -(y-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha}, \text{ also}$$
$$(y-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha} + x - \alpha = 0$$

Wir haben also für die Curve, welche der Mittelpunct des rollenden Kreises beschreibt, die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}\text{I, } (y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = r^2 \\ \text{II, } (y-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha} + (x-\alpha) = 0\end{array}\right\}$$

Dieselben drücken eine Curve aus, welche der gegebenen Cissoide in der Entfernung des Radius r parallel läuft, wie sich auch aus folgender geometrischen Betrachtung ergiebt.

Ziehen wir für B die Normale an die Cissoide, so steht sie auf der gemeinschaftlichen Tangente TB senkrecht, geht also auch durch den Mittelpunct U des rollenden Kreises. Da nun die Coordinaten des Punctes B $\alpha' \beta'$ sind, so ist die Gleichung der Normale

$$(\beta - \beta') \frac{d\beta'}{d\alpha'} + (\alpha - \alpha') = 0$$

Auf dieser Normale liegt nun in der Entfernung r vom gemeinschaftlichen Berührungspuncte der Mittelpunct U; sind daher seine Coordinaten $x' y'$, so müssen dieselben der Gleichung der Normale genügen; dadurch erhalten wir die Gleichung:

$$(y' - \beta') \frac{d\beta'}{d\alpha'} + (x' - \alpha') = 0.$$

Ferner ist aber auch

$$DU^2 + DB^2 = r^2, \text{ d. h.}$$

$$(y' - \beta')^2 + (\alpha' - x')^2 = r^2 \text{ oder was dasselbe ist}$$

$$(y' - \beta')^2 + (x' - \alpha')^2 = r^2$$

Was nun vom Puncte B gilt, ist ebenso richtig von jedem andern Puncte, den der Kreis mit der Cissoide gemein hat, so dass jedem Puncte der Cissoide eine specielle Lage des Kreismittelpunctes entspricht und zwar jedesmal auf der Normale des Punctes in der Entfernung r, d. h. der Mittelpunct beschreibt eine der gegebenen Cissoide in der Entfernung r parallele Cissoide.

Zur Bestimmung derselben erhalten wir also die Gleichungen

$$\text{I, } \frac{\beta^3}{a - \beta} = \alpha^2, \qquad \text{II, } (y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = r^2, \qquad \text{III, } (y - \beta) \frac{d\beta}{d\alpha} + x - \alpha = 0$$

b. Es mag nun der beschreibende Punct auf der Peripherie des rollenden Kreises liegen, dann können wir den Kreis so drehen, dass der beschreibende Punct in der ursprünglichen Lage mit dem Scheitel der Cissoide zusammenfällt, d. h. dass A' der beschreibende Punct ist.

Für diesen Fall ist $\psi = 0$ und $c = 0$, folgl.

$$\text{I, } x = -\alpha + \xi \cos \sigma + \eta \sin \sigma$$

$$\text{II, } y = \beta - \xi \sin \sigma + \eta \cos \sigma.$$

Dazu kommen die Gleichungen

$$\text{III, } \frac{\beta^3}{a - \beta} = \alpha^2, \qquad \text{IV, } \eta^2 + \xi^2 - 2r\xi = 0$$

$$\text{V, } \frac{d\beta}{d\alpha} = \operatorname{tg} \varphi, \qquad \text{VI, } \frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg} \varphi'$$

$$\text{VII, } \int_0^\beta \sqrt{\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)^2 + 1.}\ d\beta = \int_0^\eta \sqrt{\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^2 + 1.}\ d\eta.$$

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{2\alpha(a-\beta)^2}{\beta^2(3a-2\beta)} = \frac{2(a-\beta)^{\frac{3}{2}}}{(3a-2\beta)\sqrt{\beta}}$$

$$1 + \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2 = \frac{(3a-2\beta)^2\beta + 4(a-\beta)^3}{(3a-2\beta)^2\beta}$$

$$= \frac{9a^2\beta - 12a\beta^2 + 4\beta^3 + 4a^3 - 12a^2\beta + 12a\beta^2 - 4\beta^3}{(3a-2\beta)^2\beta}$$

$$= \frac{a^2(4a-3\beta)}{(3a-2\beta)^2\beta}, \text{ folgl. } \frac{ds}{d\alpha} = \sqrt{\frac{a^2(4a-3\beta)}{(3a-2\beta)^2\beta}}.$$

$$\text{Aber } \frac{ds}{d\beta} = \frac{ds}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{a(4a-3\beta)^{\frac{1}{2}}}{(3a-2\beta)\beta^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{(3a-2\beta)\beta^{\frac{1}{2}}}{2(a-\beta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a(4a-3\beta)^{\frac{1}{2}}}{2(a-\beta)^{\frac{3}{2}}},$$

$$s = \int\frac{a(4a-3\beta)^{\frac{1}{2}}}{2(a-\beta)^{\frac{3}{2}}}\cdot d\beta + C. = \int\frac{a}{2(a-\beta)}\sqrt{\frac{4a-3\beta}{a-\beta}}\cdot d\beta + C$$

$$= a\left\{\sqrt{\frac{4a-3\beta}{a-\beta}} - 2\right\} + a\sqrt{3}\ \text{lg nat}\ \frac{\{\sqrt{4a-3\beta} - \sqrt{3(a-\beta)}\}(2+\sqrt{3})}{\sqrt{a}}$$

Ferner ist $\eta^2 + \xi^2 - 2r\xi = 0$, folglich

$$2\eta\frac{d\eta}{d\xi} + 2\xi - 2r = 0,\ \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{r-\xi}{\eta}.$$

Aus $\eta^2 + \xi^2 - 2r\xi = 0$ folgt aber $(\xi - r)^2 = r^2 - \eta^2$, d. h. $\xi = r \pm \sqrt{r^2 - \eta^2}$, folgl.

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\mp\sqrt{r^2-\eta^2}}{\eta}, \text{ also } \frac{d\xi}{d\eta} = \mp\frac{\eta}{\sqrt{r^2-\eta^2}}$$

$$\frac{ds}{d\eta} = \sqrt{\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{\eta^2+r^2-\eta^2}{r^2-\eta^2}} = \sqrt{\frac{r^2}{r^2-\eta^2}}, \text{ folglich}$$

$$s = \int\frac{r}{\sqrt{r^2-\eta^2}}\,d\eta + C = \text{arc}\left(\sin = \frac{\eta}{r}\right)$$

Nehmen wir an, es sei $a = 2r = 1$, so vereinfachen sich unsere Gleichungen auf folgende Weise

I, $x = -\alpha + \xi\cos\sigma + \eta\sin\sigma$

II, $y = \beta - \xi\sin\sigma + \eta\cos\sigma$

III, $\frac{\beta^3}{1-\beta} = \alpha^2$, IV, $\eta^2 + \xi^2 - \xi = 0$

V, $\text{tg}\,\varphi = \frac{2(1-\beta)^{\frac{3}{2}}}{(3-2\beta)\beta^{\frac{1}{2}}}$, VI, $\text{tg}\,\varphi' = \frac{\mp\sqrt{\frac{1}{4}-\eta^2}}{\eta}$

VII, $\int\frac{(4-3\beta)^{\frac{1}{2}}}{2(1-\beta)^{\frac{3}{2}}}\,d\beta = \int\frac{d\eta}{\sqrt{1-4\eta^2}}$ d. h.

$$\sqrt{\frac{4-3\beta}{1-\beta}} - 2 + \sqrt{3}\ \lg\ \text{nat}\ \left\{\sqrt{4-3\beta} - \sqrt{3(1-\beta)}\right\}(2+\sqrt{3}) = \text{arc}\,(\sin = 2\eta).$$

Aus diesen Gleichungen müssten nun $\alpha\beta\xi\eta\varphi\varphi'$ eliminiert werden, um eine Gleichung zwischen x und y für die gesuchte Curve zu erhalten; allein aus der Form derselben ergiebt sich von vornherein, dass diese Elimination auf diesem Wege sich nicht ausführen lässt. Wollen wir uns daher von der Gestalt und den geometrischen Eigenschaften der gesuchten Curve eine ungefähre Vorstellung machen, so müssen wir einzelne Werthe für x und y berechnen.

Dies ist nun im Folgenden geschehen, und zwar wurden bei der Berechnung die Werthe von $\beta = 0,\ 0,1, \ldots.\ 0,9,\ 1$ zu Grunde gelegt. Im Laufe der Rechnung stellten sich jedoch noch Zwischenwerthe als nothwendig heraus, die in sämmtliche Tabellen mit aufgenommen sind obgleich sie von vornherein nicht begründet werden können.

1. Wir beginnen mit der Berechnung von α aus Gleichung III: $\alpha = \dfrac{\beta^{\frac{3}{2}}}{(1-\beta)^{\frac{1}{2}}}$

β	α	β	α	β	α
0	0	0,5	0,5	0,8	$\frac{8}{5} = 1,6$
0,1	$\frac{1}{30} = 0,0333\ldots$	0,524	0,5497857	0,8552	2,078343
0,2	0,1	0,6	$\frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{2}} = 0,7348469$	0,9	2,7
0,3	$\frac{3\sqrt{3}}{10\sqrt{7}} = 0,1963961$	0,7	$\frac{7\sqrt{7}}{10\sqrt{3}} = 1,069267$	0,90844	2,861484
0,4	$\frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} = 0,3265987$	0,75	1,2990384	1	∞

2. Die Gleichung V $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2(1-\beta)^{\frac{3}{2}}}{(3-2\beta)\beta^{\frac{1}{2}}}$ giebt folgende Werthe für $\operatorname{tg}\varphi$ und φ

β	$\operatorname{tg}\varphi$	$\lg \operatorname{tg}\varphi$	φ
0	∞	—	90° 0′ 0″
0,1	$\frac{27}{14} = 1,9285714$	0,2852357	62 35 33
0,2	$\frac{16}{13} = 1,2307692$	0,0901522	50 54 22
0,3	$\frac{7\sqrt{7}}{12\sqrt{3}} = 0,8910564$	0,9499052 — 1	41 42 10

β	$\operatorname{tg}\varphi$	$\lg\operatorname{tg}\varphi$	φ
0,4	$\frac{3\sqrt{3}\sqrt{2}}{11} = 0,6680426$	0,8248042 — 1	33° 44′ 41″
0,5	0,5	0,6989700 — 1	26 33 54
0,524	0,4648311	0,6672951 — 1	24 55 50
0,6	$\frac{4\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} = 0,3628874$	0,5597719 — 1	19 56 43
0,7	$\frac{3\sqrt{3}}{8\sqrt{7}} = 0,2454951$	0,3900429 — 1	13 47 35
0,75	$\frac{1}{3\sqrt{3}} = 0,1924501$	0,2843181 — 1	10 53 36
0,8	$\frac{1}{7} = 0,1428568$	0,1549010 — 1	8 7 48
0,8552	0,0924047	0,9656940 — 2	5 16 56
0,9	$\frac{1}{18} = 0,0555555$	0,7447275 — 2	3 10 47
0,90844	0,0491374	0,6914118 — 2	2 48 47
1	0		0 0 0

3. Es sind nun die Werthe zu berechnen, die sich aus Gleichung VII ergeben.

Zunächst also haben wir den Bogen der Cissoide für die verschiedenen Werthe von β zu bestimmen.

$$\text{Es war aber } s = z + \frac{\sqrt{3}}{2} \lg\text{ nat } \frac{z-\sqrt{3}}{z+\sqrt{3}} - 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \lg\text{ nat } \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}},$$

$$\text{wo } z = \sqrt{\frac{4-3\beta}{1-\beta}} \text{ für } a = 1 \text{ war.}$$

Der Werth der Constanten ist 0,281037, ferner ist $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,8660254$, folglich wird

$$s = z + 0,8660254 \lg\text{ nat } \frac{z-\sqrt{3}}{z+\sqrt{3}} + 0,281037;$$

die gemeinen Logarithmen sind auf natürliche reduciert mit Hilfe der Formel

$$\lg.\text{ nat. } n = 0,\, 3025850 \lg.\text{ vulg. } n$$

dadurch erhalten wir die Tabelle

β	z	s
0	2	0
0,1	$\frac{\sqrt{37}}{3} = 2,027587$	0,106073
0,2	$\frac{\sqrt{17}}{2} = 2,061552$	0,2395508
0,3	$\sqrt{\frac{31}{7}} = 2,104417$	0,365510
0,4	$\sqrt{\frac{14}{3}} = 2,160247$	0,529821
0,5	$\sqrt{5} = 2,236068$	0,7301214
0,524	$\sqrt{\frac{607}{119}} = 2,258504$	0,7853917
0,6	$\sqrt{\frac{11}{2}} = 2,345208$	0,9855139
0,7	$\sqrt{\frac{19}{3}} = 2,516611$	1,3347318
0,75	$\sqrt{7} = 2,6457$	1,57005
0,8	$\sqrt{8} = 2,8284272$	1,8750219
0,8552	3,147392	2,3566294
0,9	$\sqrt{13} = 3,605552$	2,979894
0,90844	3,7311931	3,1415681
1	∞	∞

4. Ferner haben wir $s = \text{arc}\,(\sin = 2\eta)$; wir müssen erst den Centriwinkel, der zu jedem Bogen gehört, bestimmen. Ist aber s gleich einem Kreisbogen und der zugehörige Centriwinkel

$$= w, \text{ so ist } s = \frac{2 r \pi w}{360} \text{ oder für } r = \frac{1}{2}$$

$$s = \frac{w \pi}{360}, \text{ d. h. } w = \frac{s . 360}{\pi}$$

Setzen wir nun für s die oben gefundenen Werthe ein, so erhalten wir

β	w
0	0° 0′ 0″
0,1	12 9 18
0,2	27 26 44
0,3	41 47 17
0,4	60 42 47
0,5	83° 39′ 57″
0,6	112 55 53
0,7	152 56 56
0,8	214 51 41
0,9	341 28 14

Aus diesen Werthen ergiebt sich, dass der Kreis um $\frac{1}{4}$ der Peripherie fortgerollt ist ($w = 90^0$) zwischen $\beta = 0,5$ und $\beta = 0,6$; für $w = 90^0$ wird aber $s = \frac{\pi}{4} = 0,785398$, welcher Werth dem in der Tabelle für $\beta = 0,524$ aufgestellten entspricht.

Setzen wir $w = 180^0$, so hat sich der Kreis um die Hälfte der Peripherie fortgewälzt; dann ist $s = \frac{\pi}{2} = 1,5707963$, welcher Werth dem für $\beta = 0,75$ nahe kommt.

Ist $w' = 270^0$, d. h. hat der Kreis um $\frac{3}{4}$ der Peripherie sich fortbewegt, so wird

$s = \frac{3}{4}\pi = 2{,}356194$ und dies findet etwa für $\beta = 0{,}8552$ statt.

Für $w = 360^0$ endlich hat der Kreis einen Umlauf vollendet, dann ist $s = \pi = 3{,}1415926$, was etwa mit $\beta = 0{,}908442$ stimmt.

Das ist der Grund, warum in den frühern Tabellen und später die Werthe für $\beta = 0{,}524$, $\beta = 0{,}75$, $\beta = 0{,}8552$ und $\beta = 0{,}90844$ mit aufgenommen sind.

5. Aus diesen Werthen von w lässt sich η berechnen, indem ja $2\,\eta = \sin w$, also $\eta = \frac{1}{2} \sin w$ ist.

Dadurch erhalten wir folgende Tabelle:

β	η	β	η	β	η
0	0	0,5	0,4969476	0,8	— 0,2857966
0,1	0,1052785	0,524	0,5	0,8552	— 0,5
0,2	0,2304527	0,6	0,460486	0,9	— 0,158896
0,3	0,3331885	0,7	0,2273926	0,90844	0
0,4	0,4360904	0,75	0		

6 Ferner hatten wir die Gleichung $\xi^2 + \eta^2 - 2\,r\,\xi = 0$,

$$\text{d. h. für } r = \frac{1}{2} \quad \xi = \frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4} - \eta^2}.$$

Im 1. und 4. Quadranten ist $\xi = \frac{1}{2} - \sqrt{}$, im 3. und 4. $\xi = \frac{1}{2} + \sqrt{}$.

Setzen wir nun die für η gefundenen Werthe ein, so ergiebt sich

β	ξ	β	ξ	β	ξ
0	0	0,5	0,4448365	0,8	0,9102684
0,1	0,0112092	0,524	0,5	0,8552	0,5
0,2	0,0562753	0,6	0,6948143	0,9	0,0154878
0,3	0,1271926	0,7	0,9453004	0,90844	0
0,4	0,2554062	0,75	1		

7. Endlich haben wir noch φ' aus $\operatorname{tg} \varphi' = \frac{d\,\eta}{d\,\xi}$ zu bestimmen.

Es war $\frac{d\,\eta}{d\,\xi} = \frac{r - \xi}{\eta} = \pm \frac{\sqrt{r^2 - \eta^2}}{\eta} = \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{4} - \eta^2}}{\eta}$; für den 1. und 4. Qua-

dranten ist $\sqrt{} = +$, für den 2. und 3. $= -$; da nun aber im 3. und 4. Quadranten η selbst $= -$ wird, so erhalten wir $\operatorname{tg} \varphi' = \frac{\sqrt{\frac{1}{4} - \eta^2}}{\eta}$ im 1. und 3. Quadranten, dagegen $\operatorname{tg} \varphi' = -\frac{\sqrt{\frac{1}{4} - \eta^2}}{\eta}$ im 2. und 4. Quadranten, wo η nur der absoluten Grösse nach in Rechnung zu ziehen ist.

Durch Einsetzen der Werthe für η erhalten wir nun

β	$\operatorname{tg} \varphi'$	$\lg \operatorname{tg} \varphi'$	φ'
0	∞	∞	90° 0′ 0″
0,1	4,642834	0,6667832	77 50 42
0,2	1,925447	0,2845316	62 33 16
0,3	1,118907	0,0487943	48 12 42
0,4	0,4455216	0,6488668 — 1	24 0 54
0,5	0,1110044	0,0453404 — 1	6 20 3
0,524	0	—	0
0,6	—0,4230623	0,6264043 — 1	157 4 7
0,7	—1,958289	0,2918768	117 3 5
0,75	$+\infty$	∞	90 0 0
0,8	1,435524	0,1570111	235 8 18
0,8552	0	—	180 0 0
0,9	—3,049241	0,4841918	288 9 25
0,90844	$-\infty$	∞	270 0 0

In den Gleichungen I und II haben wir $\sigma = \varphi + \varphi'$ gesetzt und durch σ die Coordinaten des beschreibenden Punctes ausgedrückt; dies bleibt jedoch nicht für jede Lage des rollenden Kreises richtig, indem die Abscisse des beschreibenden Punctes mit der beweglichen X′ Axe nicht immer einen Winkel gleich σ bildet.

Wir wollen jetzt diese Werthe genauer untersuchen und den Winkel KA′U, den die Abscisse des beschreibenden Punctes mit der X′ Axe bildet, μ nennen, dann ist *Fig. 4.*

$$A'K = A'H \cos \mu = A'F \cos \mu - HF \cos \mu = \xi \cos \mu - GF,$$

und da $GF = AC - BE = \xi \cos \mu - \alpha + \eta \sin \mu$,

so wird $A'K = -\alpha + \xi \cos \mu + \eta \sin \mu$.

Ferner ist $A'N = AG - KG = CB + EF - (HK + HG)$,

und da $CB = \beta$, $EF = \eta \cos \mu$, $HK + HG = \xi \sin \mu$,

so wird $A'N = \beta - \xi \sin \mu + \eta \cos \mu$, so dass wir die beiden Gleichungen erhalten

$$\text{I, } x = -\alpha + \xi \cos \mu + \eta \sin \mu$$
$$\text{II, } y = \beta - \xi \sin \mu + \eta \cos \mu$$

8. Der Winkel μ ist abhängig von $\varphi + \varphi'$, deswegen wollen wir aus Tafel 7. und 2. erst $\varphi + \varphi'$ zusammenstellen.

β	$\varphi + \varphi'$	β	$\varphi + \varphi'$	β	$\varphi + \varphi'$
0	180° 0′ 0″	0,5	32° 53′ 57″	0,8	243° 16′ 6″
0,1	140 26 15	0,524	24 55 50	0,8552	185 16 56
0,2	113 27 38	0,6	177 0 50	0,9	291 20 12
0,3	89 54 52	0,7	130 50 40	0,90844	272 48 47
0,4	57 45 35	0,75	100 53 36		

9. Sollen nun die obigen Gleichungen zur Berechnung von x und y angewendet werden, so ist dabei noch folgendes zu berücksichtigen.

a, für $\beta = 0$ bis $\beta = 0{,}524$ wird $\mu = \varphi + \varphi'$, so dass wir erhalten

$$\text{I, } x = -\alpha + \xi \cos (\varphi + \varphi') + \eta \sin (\varphi + \varphi')$$
$$\text{II, } y = \beta - \xi \sin (\varphi + \varphi') + \eta \cos (\varphi + \varphi')$$

Setzen wir nun noch für $\beta = 0$ bis $\beta = 0{,}2$ $\psi = 180^\circ - (\varphi + \varphi')$, so wird

$$x = -\alpha - \cos \psi + \eta \sin \psi$$
$$x = \beta - \xi \sin \psi - \eta \cos \psi$$

β	α	η	ξ	ψ
0	0	0	0	0
0,1	0,0333..	0,1052785	0,0112092	39° 33′ 45″
0,2	0,1	0,2304527	0,0562753	66 32 22

Für $\beta = 0, 3$ bis $0{,}524$ ist $\psi = \varphi + \varphi'$, so dass

$$x = -\alpha + \xi \cos \psi + \eta \sin \psi$$
$$y = \beta - \xi \sin \psi + \eta \cos \psi$$

β	α	η	ξ	ψ
0,3	0,1963961	0,3331885	0,1271926	89° 54′ 52″
0,4	0,3265987	0,4360904	0,2554062	57 45 35
0,5	0,5	0,4969476	0,4448365	32 53 57
0,524	0,5497857	0,5	0,5	24 55 50

b, für $\beta = 0{,}6$ bis $0{,}75$ wird $\mu = 180 + \varphi + \varphi'$ und wenn $\psi = 180 - (\varphi + \varphi')$, so erhalten wir

$$x = -\alpha + \xi \cos \psi - \eta \sin \psi$$
$$y = \beta + \xi \sin \psi + \eta \cos \psi$$

β	α	η	ξ	ψ
0,6	0,7348469	0,460486	0,6948143	2° 59′ 10″
0,7	1,069267	0,2273926	0,9453004	49 9 20
0,75	1,2990384	0	1	79 6 24

c, für $\beta = 0,8$ und $0,8552$ ist $\mu = \varphi + \varphi'$ und wenn

$$\psi = \varphi + \varphi' - 180^0, \text{ so wird}$$

$$x = -\alpha - \xi \cos \psi - \eta \sin \psi$$

$$y = \beta + \xi \sin \psi - \eta \cos \psi,$$

wobei zu berücksichtigen ist, dass bei der Berechnung η — genommen werden muss.

β	α	η	ξ	ψ
0,8	1,6	—0,2857966	0,9102684	63° 16′ 6″
0,8552	2,078343	—0,5	0,5	5 16 56

d, für $\beta = 0,9$ und $0,90844$ ist $\mu = \varphi + \varphi' - 180^0$, so dass wir für $\psi = 360^0 - (\varphi + \varphi')$ erhalten

$$x = -\alpha - \xi \cos \psi + \eta \sin \psi$$

$$y = \beta - \xi \sin \psi - \eta \cos \psi,$$

wobei aber wieder $\eta = -$ zu nehmen ist.

β	α	η	ξ	ψ
0,9	2,7	—0,158896	0,0154878	68° 39′ 48″
0,90844	2,861484	0	0	87 11 13

Werden nun diese Rechnungen für x und y ausgeführt, so erhalten wir

β	x	y	β	x	y
0	0	0	0,6	— 0,0649645	1,0960563
0,1	0,0250791	0,0116982	0,7	— 0,6230531	1,5638249
0,2	0,0889979	0,0672469	0,75	— 1,1100572	1,7319807
0,3	0,1369819	0,1733051	0,8	— 1,7541987	1,7415364
0,4	0,1784749	0,4165608	0,8552	— 2,5301866	1,3991052
0,5	0,14342	0,6756327	0,9	— 2,8536403	0,9433877
0,524	0,1143837	0,76665	0,90844	— 2,861484	0,90844

Aus dieser Tabelle ergiebt sich, dass zwischen $\beta = 0,4$ und $\beta = 0,5$ ein Maximum für x liegt, dass ferner die Curve zwischen $\beta = 0,524$ und $\beta = 0,6$ die Y Axe schneidet, dass der Scheitel der Curve die Coordinaten $x = -1,1100572$ und $y = 1,7319807$ hat, dass zwischen

$\beta = 0{,}8$ und $\beta = 0{,}8552$ y seinen grössten Werth erreicht und von da wieder kleiner wird, bis für $\beta = 0{,}90844$ der beschreibende Punct wieder mit der Cissoide zusammenfällt, da hier $\beta = y$ ist. Die Curve hat ungefähr die Gestalt, wie sie in Fig. 5 sich darstellt. Nun könnte man den Kreis noch weiter rollen lassen und würde in entsprechender Weise wie oben die Coordinaten weiter berechnen können; allein wir wollen diese Rechnungen jetzt fallen lassen und zum Schluss dieses § noch auf anderem Wege Gleichungen zu erhalten suchen, die sich zur Elimination besser eignen, als die obigen.

Die Gleichung der Cissoide sei wieder wie oben

$\alpha^2 = \frac{\beta^3}{a-\beta}$ in Bezug auf AX als XAxe und AY als YAxe, dann ist

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{2\alpha\,(a-\beta)^2}{\beta^2(3a-2\beta)} = \frac{2(a-\beta)^{\frac{3}{2}}}{(3a-2\beta)\beta^{\frac{1}{2}}}, \text{ also } 1 + \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2 = \frac{a^2\,(4a-3\beta)}{(3a-2\beta)^2\beta}.$$

Fig. 5. Die Coordinaten des beschreibenden Punctes seien x y, die Gleichung des rollenden Kreises für Polarcoordinaten, deren Anfangspunct der beschreibende Punct C und deren Axe der Durchmesser CE ist,

$$u - 2r\cos\varphi = 0, \text{ also } \frac{du}{d\varphi} = -2r\sin\varphi,\ u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = u^2 + 4r^2\sin^2\varphi = 4r^2.$$

Wenn nun GH gemeinschaftliche Tangente für den Punct B, $\angle$ GHX $= v$, CBH $= \psi$, CBF $= \tau$, also CBH — FBH = CBF, d. h. $\tau = \psi - v$ ist, so wird

$$\cos\tau = \cos\psi\cos v + \sin\psi\sin v$$
$$\sin\tau = \sin\psi\cos v - \cos\psi\sin v.$$

Nun ist aber $\operatorname{tg} v = \frac{d\beta}{d\alpha}$, folglich, da $\operatorname{tg} v = m = \frac{\sin v}{\sqrt{1-\sin^2 v}}$, also $m^2 = \frac{\sin^2 v}{1-\sin^2 v}$

$\sin v = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$ und entsprechend $m = \frac{\sqrt{1-\cos^2 v}}{\cos v}$, also $\cos v = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$ ist, so wird

$$\sin v = \frac{\pm\frac{d\beta}{d\alpha}}{\sqrt{1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}},\ \cos v = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}}.$$

Ebenso ist $\operatorname{tg}\psi = u\frac{d\varphi}{du}$, folglich $\sin\psi = \frac{\pm u\frac{d\varphi}{du}}{\sqrt{1+u^2\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2}} = \pm\frac{u}{\sqrt{u^2+\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2}}$ und

$$\cos\psi = \pm\frac{1}{\sqrt{1+u^2\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2}} = \pm\frac{\frac{du}{d\varphi}}{\sqrt{u^2+\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2}}$$

Nach Einsetzung der obigen Werthe erhalten wir nun

$$\sin v = \frac{2(a-\beta)^{\frac{3}{2}}}{(3a-2\beta)\beta^{\frac{1}{2}}} : \frac{a(4a-3\beta)^{\frac{1}{2}}}{(3a-2\beta)\beta^{\frac{1}{2}}} = \frac{2(a-\beta)^{\frac{3}{2}}}{a(4a-3\beta)^{\frac{1}{2}}} \text{ und } \cos v = \frac{(3a-2\beta)\beta^{\frac{1}{2}}}{a(4a-3\beta)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\sin \psi = \frac{u}{2r} = \frac{2r\cos\varphi}{2r} = \cos\varphi \text{ und } \cos\psi = -\sin\varphi, \text{ also}$$

$$\cos\tau = -\frac{(3a-2\beta)\beta^{\frac{1}{2}}}{a(4a-3\beta)^{\frac{1}{2}}}\sin\varphi + \frac{2(a-\beta)^{\frac{3}{2}}}{a(4a-3\beta)^{\frac{1}{2}}}\cos\varphi \text{ und}$$

$$\sin\tau = \frac{(3a-2\beta)\beta^{\frac{1}{2}}}{a(4a-3\beta)^{\frac{1}{2}}}\cos\varphi + \frac{2(a-\beta)^{\frac{3}{2}}}{a(4a-3\beta)^{\frac{1}{2}}}\sin\varphi.$$

Aber $\cos\tau = \frac{FB}{CB} = \frac{\alpha - x}{u}$, folgl. $\alpha - x = u\cos\tau$, $x = \alpha - u\cos\tau$,

$\sin\tau = \frac{CF}{CB} = \frac{y-\beta}{u}$, folgl. $y - \beta = u\sin\tau$, $y = \beta + u\sin\tau$, folgl. wird

$$M = x - \alpha = 2r\cos\varphi\left\{\frac{(3a-2\beta)\beta^{\frac{1}{2}}}{a(4a-3\beta)^{\frac{1}{2}}}\sin\varphi - \frac{2(a-\beta)^{\frac{3}{2}}}{a(4a-3\beta)^{\frac{1}{2}}}\cos\varphi\right\} \quad \Big| \text{ multipliziert mit } (3a-2\beta)\beta^{\frac{1}{2}}$$

$$N = y - \beta = 2r\cos\varphi\left\{\frac{(3a-2\beta)\beta^{\frac{1}{2}}}{a(4a-3\beta)^{\frac{1}{2}}}\cos\varphi + \frac{2(a-\beta)^{\frac{3}{2}}}{a(4a-3\beta)^{\frac{1}{2}}}\sin\varphi\right\} \quad \Big| \; 2(a-\beta)^{\frac{3}{2}} \text{ u. addiert}$$

$$(x-\alpha)(3a-2\beta)\beta^{\frac{1}{2}} + (y-\beta)2(a-\beta)^{\frac{3}{2}} = 2r\cos\varphi\left\{\frac{(3a-2\beta)^2\beta + 4(a-\beta)^3}{a(4a-3\beta)^{\frac{1}{2}}}\right\}\sin\varphi,$$

$$(y-\beta)\frac{2(a-\beta)^{\frac{3}{2}}}{(3a-2\beta)\beta^{\frac{1}{2}}} + (x-\alpha) = 2r\cos\varphi\sin\varphi\frac{a(4a-3\beta)^{\frac{1}{2}}}{(3a-2\beta)\beta^{\frac{1}{2}}}.$$

Es war aber $\frac{2(a-\beta)^{\frac{3}{2}}}{(3a-2\beta)\beta^{\frac{1}{2}}} = \frac{d\beta}{d\alpha}$* und $\frac{a(4a-3\beta)^{\frac{1}{2}}}{(3a-2\beta)\beta^{\frac{1}{2}}} = \frac{ds}{d\alpha}$†, folgl. erhalten wir die Gleichung

$$(y-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha} + x - \alpha = 2r\cos\varphi\sin\varphi\frac{ds}{d\alpha}.$$

Es ist aber auch der Bogen der Cissoide von A bis B gleich dem Kreisbogen von C bis B, also auch $\frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{d\varphi}$, wir müssen daher noch $\frac{ds}{d\varphi}$ bestimmen.

$$s = \int\sqrt{u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2}\,.\,d\varphi + C = \int_0^{\varphi} \pm 2r\,d\varphi + C = \pm 2r\varphi + C = \pm 2r\varphi,$$

da für $\varphi = 0$ auch $s = 0$, also $C = 0$ ist.

---

* pg. 48.

† pg. 48.

$\frac{ds}{d\alpha} = 2r \frac{d\varphi}{d\alpha}$, und da $u = 2r \cos \varphi$, so wird $\frac{du}{d\alpha} = -2r \sin \varphi \frac{d\varphi}{d\alpha}$, folgl.

$$(y-\beta) \frac{d\beta}{d\alpha} + x - \alpha = -u \frac{du}{d\alpha}, \text{ der } (y-\beta) \frac{d\beta}{d\alpha} + x - \alpha + u \frac{du}{d\alpha} = 0.$$

Quadrieren und addieren wir die Gleichungen M und N, so erhalten wir

$$(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = 4r^2 \cos^2\varphi \frac{(3a-2\beta)^2\beta + 4(a-\beta)^3}{a^2(4a-3\beta)}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 4r^2\cos^2\varphi = u^2.$$

So erhalten wir denn die beiden Gleichungen

$$\text{I, } (y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = u^2$$

$$\text{II, } (y-\beta) \frac{d\beta}{d\alpha} + (x-\alpha) + u \frac{du}{d\alpha} = 0, \text{ d. h.}$$

die gesuchte Curve ist die einhüllende Curve derjenigen Kreise, deren Mittelpuncte auf der gegebenen Cissoide liegen und deren Radien die aufeinanderfolgenden Werthe des Radiusvector u sind.

Da der Punct C der Berührungspunct eines eingehüllten Kreises, dessen Mittelpunct in B liegt, und der Cycloide ist, so folgt daraus, dass der Radiusvector CB mit der Normale der Cycloide für C zusammenfällt.

Dasselbe Resultat erhalten wir, wenn wir die Gleichung $(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 + u^2 = 0$ differenziieren; dadurch wird nämlich

$$(y-\beta) \frac{dy}{dx} + x - \alpha - (y-\beta) \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dx} - (x-\alpha) \frac{d\alpha}{dx} = u \frac{du}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dx},$$

$$(y-\beta) \frac{dy}{dx} + (x-\alpha) - \left\{(y-\beta) \frac{d\beta}{d\alpha} + (x-\alpha) + u \frac{du}{d\alpha}\right\} \frac{d\alpha}{dx} = 0,$$

darin den Werth der Gleichung II eingesetzt,

$$\text{III, } (y-\beta) \frac{dy}{dx} + (x-\alpha) = 0$$

der Werth von $\frac{dy}{dx}$ ändert sich also nicht, es mag α constant oder veränderlich sein, d. h. die Gleichung III drückt sowohl die Normale im Puncte xy des Kreises, dessen Mittelpunct $\alpha\beta$ ist, als die Normale im Puncte xy der Cycloide aus.

Es ist nun aber $\frac{du}{d\alpha} = \frac{du}{ds} \frac{ds}{d\alpha}$ und da $\frac{ds}{du} = \frac{ds}{d\varphi} \frac{d\varphi}{du} = \sqrt{u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2} \cdot \frac{d\varphi}{du}$ d. h.

$\frac{du}{ds} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2}} \cdot \frac{du}{d\varphi}$ und $\frac{ds}{d\alpha} = \sqrt{1 + \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}$ ist, so wird $\frac{du}{d\alpha} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2}}{\sqrt{u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2}} \cdot \frac{du}{d\varphi}.$

Setzen wir diesen Werth in Gleichung II ein, so erhalten wir

$$\text{IV, } \left\{(y-\beta) \frac{d\beta}{d\alpha} + (x-\alpha)\right\} \sqrt{u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2} + u \sqrt{1 + \left(\frac{d\beta}{da}\right)^2} \cdot \frac{du}{d\varphi} = 0;$$

durch eine leichte Umformung geht diese Gleichung über in

$$\left\{(y-\beta) + (x-\alpha)\frac{d\alpha}{d\beta}\right\}\sqrt{u^2+\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2} + u\frac{du}{d\varphi}\sqrt{1+\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)^2} = 0$$

$$\left\{(y-\beta) + (x-\alpha)\frac{(3a-2\beta)\beta^{\frac{1}{2}}}{2(a-\beta)^{\frac{3}{2}}}\right\} 2r - 4r^2 \sin\varphi\cos\varphi\,\frac{a(4a-3\beta)^{\frac{1}{2}}}{2(a-\beta)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Nun hatten wir

I, $(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = 4r^2\cos^2\varphi$; aus III, wenn $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt wird,

$(x-\alpha) = -(y-\beta)\,p$, $(x-\alpha)^2 = (y-\beta)^2 p^2$, folgl.

$(y-\beta)^2(1+p^2) = 4r^2\cos^2\varphi$, also $y-\beta = \pm\frac{2r\cos\varphi}{\sqrt{1+p^2}}$, $\beta = y \mp \frac{2r\cos\varphi}{\sqrt{1+p^2}}$

Ferner da $x-\alpha = -(y-\beta)\,p$, so wird $\{x+(y-\beta)p\}^2 = \alpha^2 = \frac{\beta^3}{a-\beta}$,

d. h. $\{(yp+x)-\beta p\}^2(a-\beta) = \beta^3$.

Ordnet man diese Gleichung nach β, so erhält man

III, $(1+p^2)\beta^3 - \{ap^2 + 2p(yp+x)\}\beta^2 + \{2a(yp+x)p + (xp+x)^2\}\beta$
$- a(yp+x)^2 = 0.$

Setzt man in Gleichung IV für $x-\alpha$ den Werth $-(y-\beta)p$, so erhält dieselbe die Form

IV, $(y-\beta)\left\{2(a-\beta)^{\frac{3}{2}} - (3a-2\beta)\beta^{\frac{1}{2}}p\right\} = 2ra(4a-3\beta)^{\frac{1}{2}}\sin\varphi\cos\varphi$,

und da $y-\beta = \frac{2r\cos\varphi}{\sqrt{1+p^2}}$, so wird

$$\frac{2r\cos\varphi}{\sqrt{1+p^2}}\left\{2(a-\beta)^{\frac{3}{2}} - (3a-2\beta)\beta^{\frac{1}{2}}p\right\} = 2ra(4a-3\beta)^{\frac{1}{2}}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\frac{\left\{2(a-\beta)^{\frac{3}{2}} - (3a-2\beta)\beta^{\frac{1}{2}}p\right\}^2}{1+p^2} = a^2(4a-3\beta)(1-\cos^2\varphi)$$

$$= a^2(4a-3\beta) - \frac{a^2(4a-3\beta)(y-\beta)^2(1+p^2)}{4r^2}, \text{ folgl.}$$

V, $4r^2\left\{2(a-\beta)^{\frac{3}{2}} - (3a-2\beta)\beta^{\frac{1}{2}}p\right\}^2 - 4r^2a^2(4a-3\beta)(1+p^2)$
$+ a^2(4a-3\beta)(1+p^2)^2(y-\beta)^2 = 0$

Diese Gleichung mit III zusammen lässt wenigstens doch die Möglichkeit einer Elimination von β erkennen, freilich so, dass wir dann für x und y eine Differenzialgleichung höheren Grades bekommen.

III.

§. 25. Die Cissoide war schon den griechischen Geometern bekannt und ist von *Diokles* aus Anlass des delischen Problems erfunden worden, wie sich aus seiner Lösung dieser Aufgabe deutlich ergiebt.

Die Lebenszeit des *Diokles* ist freilich unsicher. Einige setzen ihn in das V. Jahrhundert p. Ch. und stützen diese Ansicht darauf, dass bei *Pappus* seiner und der von ihm entdeckten Linie keine Erwähnung geschieht; indessen ist dieser Grund nicht zureichend, denn schon *Eutokius* in dem oben pg. 1 erwähnten Commentar weisst dem *Pappus* nach, dass seine Lösung des delischen Problems dieselbe sei, als die des *Diokles*, nur mit etwas anderen Worten, so dass *Diokles* wohl absichtlich von *Pappus* unerwähnt geblieben sein kann. Specieller eingehende Untersuchungen über das Zeitalter des *Diokles* finden sich bei *Reimer* in seiner *historia problematis de duplicatione cubi, Göttingae* 1798. Dieser führt eine Stelle an aus *Proklus*,* wo derselbe über *Geminus* spricht und die Cissoide mit erwähnt: *ἐπεὶ* sc. *Γεμῖνος καὶ τὰς γενέσεις τῶν σπειρικῶν γραμμῶν καὶ τῶν κογχοειδῶν καὶ τῶν κισσοειδῶν παραδίδωσι.*

Hiernach muss *Diokles* noch vor *Geminus* gelebt haben. Er hatte seine Lösung des delischen Problems vermittelst der Cissoide und deren Construction in einer Schrift *περὶ Πυρίων* niedergelegt, die aber leider verloren gegangen ist. Dieselbe würde uns daher unbekannt geblieben sein, wenn ihn nicht *Eutokius* von *Ascalon* in seinem Commentar zu *Archimedes* Schrift von der *Kugel* und vom *Cylinder* lib. II prop. 2 und 5 erwähnte.

Archimedes stellt sich in jener Schrift prop. 2 (*A*) die Aufgabe *einen gegebenen Kegel oder Cylinder in eine Kugel von gleicher Grösse zu verwandeln*** *Τὸ δὲ δεύτερον* sc. *τῶν προβλημάτων ἦν κώνου δοθέντος ἤ κυλίνδρου σφαῖραν εὑρεῖν τῷ κώνῳ ἢ τῷ κυλίνδρῳ ἴσην.*

Die Lösung führt er auf die der Aufgabe zurück: zu 2 gegebenen Linien 2 mittlere Proportionalen zu finden, ohne jedoch die Auflösung der letztern selbst anzufügen. Dies veranlasst den Commentator *Eutokius*, weil er auch sonst dieselbe bei *Archimedes* nicht finden kann, die bedeutenderen Lösungen anderer griechischer Mathematiker an dieser Stelle aufzuführen, unter ihnen auch die des Diokles aus dessen Schrift *περὶ Πυρίων*, die ihm jedenfalls vorgelegen haben muss: *πολλῶν δὲ κλεινῶν ἀνδρῶν γραφαῖς ἐντυχήκαμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐπαγγελλομέναις.*†

Alsdann finden wir *Diokles* wieder erwähnt ad lib. II prop. 5. (*Δ*), worin *Archimedes* die Aufgabe lösen will *eine gegebne Kugel nach gegebenem Verhältniss durch eine Ebne zu theilen*; die Lösung wird jedoch nicht gehörig durchgeführt und *Eutokius* kann sie auch sonst bei

---

* *Πρόκλου διαδόχου εἰς τὸ πρῶτον τῶν Εὐκλείδου στοιχείων ἐξηγημάτων βιβλία δ'*, **Basil. 1533 apud Joann. Hervagium pg. 31.**

** **Archimedis excellentissima opera Basil. 1544 pg. 33.**

† **Eutocii comment. ad Archimedis libr. II de sphaera et cylindro Basil 1544 pg. 12.**

Archimedes nicht finden, weshalb er die Lösungen des *Dionysodorus* und die des *Diokles* anführt, letztre wieder aus der Schrift *περὶ Πυρίων*, indem er hier den Diokles redend einführt:*

γράφει δὲ καὶ ὁ Διοκλῆς ἐν τῷ περὶ Πυρίων προλέγων τάδε· ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου Ἀρχιμήδης ἀπόδειξεν, ὅτι πᾶν τμῆμα ἴσον ἐστὶ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ εὐθεῖαν τινα λόγον ἔχουσαν πρὸς τὴν ἀπὸ κ. τ. λ.

Hieraus ist ersichtlich, dass Diokles nach *Archimedes* gelebt hat; da aber die von ihm erfundene Cissoide vom Geminus erwähnt wird, der wahrscheinlich kurze Zeit nach *Nicomedes* und *Hipparchus*, also gegen 100 a. Ch. lebte, so gehört *Diokles* noch in das 2. Jahrhundert a. Ch.

Die Schrift *περὶ Πυρίων* (wohl zu ergänzen *μηχανημάτων*) handelte jedenfalls über Construction und Anwendung einer Kriegsmaschine, mittelst welcher wahrscheinlich glühende Pfeile, oder andre zum Anzünden feindlicher Werke, Mauern, Schiffe etc. dienende Gegenstände abgeschossen wurden, so dass dieselbe unter die Klasse der Schriften des *Hero* (*εἰσαγωγαὶ μηχανικαὶ* und *βελοποιϊκὰ*), ferner des *Athenäus περὶ μηχανημάτων* und des *Biton κατασκευαὶ πολεμικῶν ὀργάνων καταπελτικῶν* oder des *Philo* von *Byzanz βελοποιϊκὰ* oder *ὀργανοποιϊκὰ*** zu gehören scheint; es wird dies um so wahrscheinlicher, da Eutokius die Lösung der Aufgabe *zu zwei gegebnen Linien zwei mittlere Proportionalen zu finden*, welche Hero zugehört, aus den oben genannten Schriften desselben entnommen hat. †

Die Lösung, welche Diokles von der Aufgabe liefert: *zu zwei gegebnen Linien zwei mittlere Proportionallinien zu finden*, ist nun folgende. ††

In einem Kreise ziehe man 2 senkrechte Durchmesser AB und CD, schneide von B aus zu beiden Seiten gleiche Bogen BE und BF ab, ziehe FG parallel AB und DE, welche Linien sich in H schneiden, dann sind FG und GD zwei mittlere Proportionallinien zwischen CG und GH. *Fig. VI.*

Zieht man nämlich noch EK parallel AB, so ist

DK : EK = EK : CK = DG : HG, d. h. da DK = CG, EK = FG und CK = DG ist,

CG : FG = FG : DG = DG : HG.

Macht man ebenso BM = BN, zieht NP parallel AB und DM, so ist wie vorher

CP : NP = NP : DP = DP : OP.

Zieht man daher zu beiden Seiten von B nach D und C hin in gleichem Abstande von AB fortlaufend Parallelen mit AB und dann die zugehörigen, DE und DM einerseits, CF und CN andrerseits entsprechenden Verbindungslinien, so liegen die Durchschnitttspuncte dieser Verbindungslinien mit den entsprechenden Parallelen auf einer krummen Linie, die sich von B symmerisch nach C und D erstreckt.

Nehmen wir auf derselben irgend einen Punct an und ziehen durch ihn eine Parallele mit

---

* Eutoc. etc. pg. 36.

** vergl. Schoell Gesch. der griech. Literatur, Berlin 1830 II p. 237 f.

† vergl. Fabricii bibliotheca graeca, 2. Ausgabe, tom. III pg. 562 und 563 Anm. 2.

†† Eutoc. etc. pg. 15 f.

AB, so sind diese Parallele und dasjenige Segment des auf AB senkrechten Durchmessers DC, welches von dem nach derselben Seite hin liegenden Scheitel D desselben gerechnet wird, zwei mittlere Proportionalen zwischen dem andern Segmente dieses Durchmessers und dem Segmente der Parallelen vom angenommenen Puncte bis zum Durchmesser.

Fig. VII. Soll man also zwischen 2 Geraden a und b 2 mittlere Proportionallinien finden, so nimmt man in einem Kreise, dessen Radius $> \frac{a}{2}$ und b sein muss, 2 aufeinander senkrechte Durchmesser CD und EF und beschreibt in demselben eine Linie DHF durch fortlaufende Puncte, wie vorher angegeben wurde. Nun nimmt man K auf GF so an, dass a : b = CG : KG, zieht CK bis zur Curve in H, ferner LHM parallel EF, dann ist nach dem vorigen Beweis

$$CL : ML = ML : DL = DL : HL, \text{ ferner ist}$$
$$a : b = CG : KG = CL : HL.$$

Nimmt man jetzt CL : ML = a : y und ML : DL = y : x, also auch DL : HL = x : b, so lassen sich y und x aus diesen Proportionen bestimmen und man erhält
a : y = y : x = x : b, d. h. x und y sind die gesuchten mittleren Proportionalen zwischen a und b.

In neuerer Zeit ist dieselbe Aufgabe und ihre Lösung mittelst der Cissoide einigemal besonders behandelt worden. So hat *Newton* eine Erzeugungsart der Cissoide angegeben, die wir schon oben (§ 7) besprochen haben.

Auch *Joh. Wallis* stellte Untersuchungen über die Cissoide, ihren Schwerpunct, ihre Fläche und über den Raum der durch Rotation derselben entstandenen Körper an und zwar mit Hilfe der *Arithmetica Infinitorum* in seiner Abhandlung über die *Cycloide* und *Cissoide.* *

Der beschränkte Raum gestattet leider nicht darauf einzugehen. Vielmehr mag zum Schluss die Frage noch ganz kurz erläutert werden, ob die Curve, die wir jetzt *Cissoide* nennen, mit der von den alten Griechen so bezeichneten auch identisch sei.

Es kommt hierbei zunächst wieder die oben angeführte Stelle bei *Proklus* in Betracht. ** Dort sagt er nämlich, *Geminus* nenne die Cissoide eine zusammengesetzte, d. h. eine gebrochene und einen Winkel bildende Linie; ein andermal nach einer andern Eintheilung nennt er sie eine gemischte Linie, deren Definition *Geminus* pg. 29 so festsetzt, dass es eine durch unähnliche Bewegungen entstehende Linie sei (*ἐξ ἀνομοίων κινήσεων*), welche in der Ebne beschrieben werde und in sich zusammenlaufe: *διαιρεῖ δ' αὐτὴν γραμμήν ὁ Γεμῖνος, πρῶτον μὲν εἰς τὴν ἀσύνθετον καὶ τὴν σύνθετον. καλεῖ δὲ σύνθετον τὴν κεκλασμένην καὶ γωνίαν ποιοῦσαν καὶ τὴν ἐπ' ἄπειρον ἐκβαλλομένην, σχῆμα λέγων ποιεῖν, κυκλικὴν τὴν τοῦ θυραιοῦ τὴν κιττοειδῆ, μὴ ποιεῖν δὲ τὴν τοῦ ἀμβλιγονίου* (wohl *ἀμβλυγωνίου*), *τὴν κογχοειδῆ, τὴν εὐθεῖαν, πάσας τὰς τοιαύτας. καὶ πάλιν κατὰ ἄλλον τρόπον τῆς ἀσυνθέτου γραμμῆς τὴν μὲν ἁπλῆν εἶναι τὴν δὲ μικτήν. καὶ τῆς*

---

* Joann. Wallis opera mathematica, Oxon. 1695 vol. I pg. 545 ff.

** Procli comment. etc. pg. 31.

ἁπλῆς τὴν μὲν σχῆμα ποιεῖν, ὡς τὴν κυκλικήν, τὴν δὲ ἀόριστον εἶναι, τὴν δὲ μικτήν. ὡς τὴν εὐθεῖαν· τῆς δὲ μικτῆς, τὴν μὲν ἐν τοῖς ἐπιπέδοις εἶναι, τήν δὲ ἐν τοῖς στερεοῖς· καὶ τῆς ἐν ἐπιπέδοις, τὴν μὲν ἐν αὐτῇ συμπίπτειν, ὡς τὴν κιττοειδῆ, τὴν δὲ ἐπ' ἄπειρον ἐκβάλλεσθαι κ.τ.λ.

Dabei ist zu bemerken, dass die Griechen nur den Theil der Cissoide kannten und betrachteten, der sich innerhalb des Kreises erstreckt, und dass sie dieselbe nicht über den Kreis hinaus zu führen verstanden, wie sich schon aus der Construction des *Diokles* ergiebt; ferner hiess nicht ein einzelner Zweig Cissoide, sondern beide Zweige GFAF′G′ bildeten dieselbe, so dass sie *Fig.* 1. allerdings bei A gebrochen ist oder einen Winkel bildet. Für diese Ansicht spricht eine Stelle bei *Proklus* (pg. 35), wo er an *Euklid's* Definition des ebnen Winkels das tadelt, dass nach derselben nicht auch ein Winkel durch nur eine Linie gebildet werde, und als Beispiel die Cissoide hervorhebt, welche, obgleich sie nur eine Linie sei, doch einen Winkel bilde: *καὶ τοίγε ἡ κισσοειδὴς μία οὖσα ποιεῖ γωνίαν*, indem er zugleich hinzusetzt, dass das Ganze den Namen *Cissoide* führe, nicht die einzelnen Theile: *τὴν γὰρ ὅλην κισσοειδῆ καλοῦμεν, ἀλλ' οὐ τὰ μόρια αὐτῶν, ἵνα λέγει τις, ὅτι ταῦτα ποιεῖ τὴν γωνίαν συνεύοντα* (wohl *συννεύοντα*).

Ebendaselbst kurz vorher, wo er über die Eintheilung der ebenen Winkel spricht: *ὅταν δὲ αἱ κισσοειδεῖς γραμμαὶ συνεύουσαι* (wohl *συννεύουσαι*) *πρὸς ἓν σημεῖον, ὥςπερ τὰ τοῦ κισσοῦ φύλλα — καὶ γὰρ τὴν ἐπωνυμίαν ἐκεῖθεν ἔσχον — ποιῶσι γωνίαν ὑπὸ μικτῶν ἡ τοιαύτη δήπου περιέχεται ὑπὸ γραμμῶν κ.τ.λ.*, bei welcher Gelegenheit er also auch die Ursache anführt, warum diese Curve *Cissoide* heisst. Berücksichtigen wir endlich, dass, wie vorhin bemerkt, die Griechen nur die Cissoide kannten, so weit sie sich innerhalb des Kreises erstreckt, so findet auch das leicht seine Erklärung, dass oben von der Cissoide gesagt wird, sie bilde eine geschlossene Figur. Demnach würde es unbegründet sein die Identität der Cissoide mit der der Alten zu bezweifeln.

Druckfehler.

pg. 6	Z. 12	lies	$-\frac{4}{3}\cos^2\varphi$	für $-\frac{3}{4}\cos^2\varphi$
- 8	- 13	-	$d = \frac{b^4}{a^2 b} = \frac{b^3}{a^2}$	- $d = \frac{b^4}{ab} = \frac{b^3}{a}$
- 8	- 14	-	$b^3 = a^2 d$	- $b^3 = a d$
- 15	- 9	-	$\eta^2 =$	- $\eta =$
- 18	- 22	-	$\cos^2\varphi'$	- $\cos\varphi^{2\prime}$
- 24	- 18	-	$(3-0{,}5243134)^2$	- $(3-0{,}5243134)^3$
- 27	- 24	-	$\frac{3a^2}{4\sqrt{(a-x)^5 x}}$	- $\frac{3a^2}{4\sqrt{(a-x)^5 x}}$
- 28	- 1	-	$\left(-\frac{a}{2}\right)^5$	- $\left(\frac{a}{2}\right)^5$
- 29	- 3	-	$4(a-x)^3$	- $4(a-x)_c$
- 29	- 24	-	$(3a-2x)^2$	- $3a-2x)^2$
- 33	- 5	-	$-a^3\alpha$	- $-\alpha$
- 33	- 12	-	9,3339844	- 6,3339844
- 36	- 26	-	$(x-a)$	- $(x-\alpha)$
- 37	- 11	-	$486\,a^4 x^2$	- $486\,a^2 x^2$
- 40	- 7	-	$-x^{q-1}$	- $-x_{q}^{-1}$
- 45	- 17	-	derselben	- derselden
- 45	- 27	-	$\frac{d\alpha}{d\beta}$	- $\frac{d\alpha}{d\xi}$
- 46	- 2	-	I und II	- I und I
- 46	- 3	-	$-\alpha$	- $-a$
- 58	- 13	-	$= u^2$	- $+ u^2 = 0$

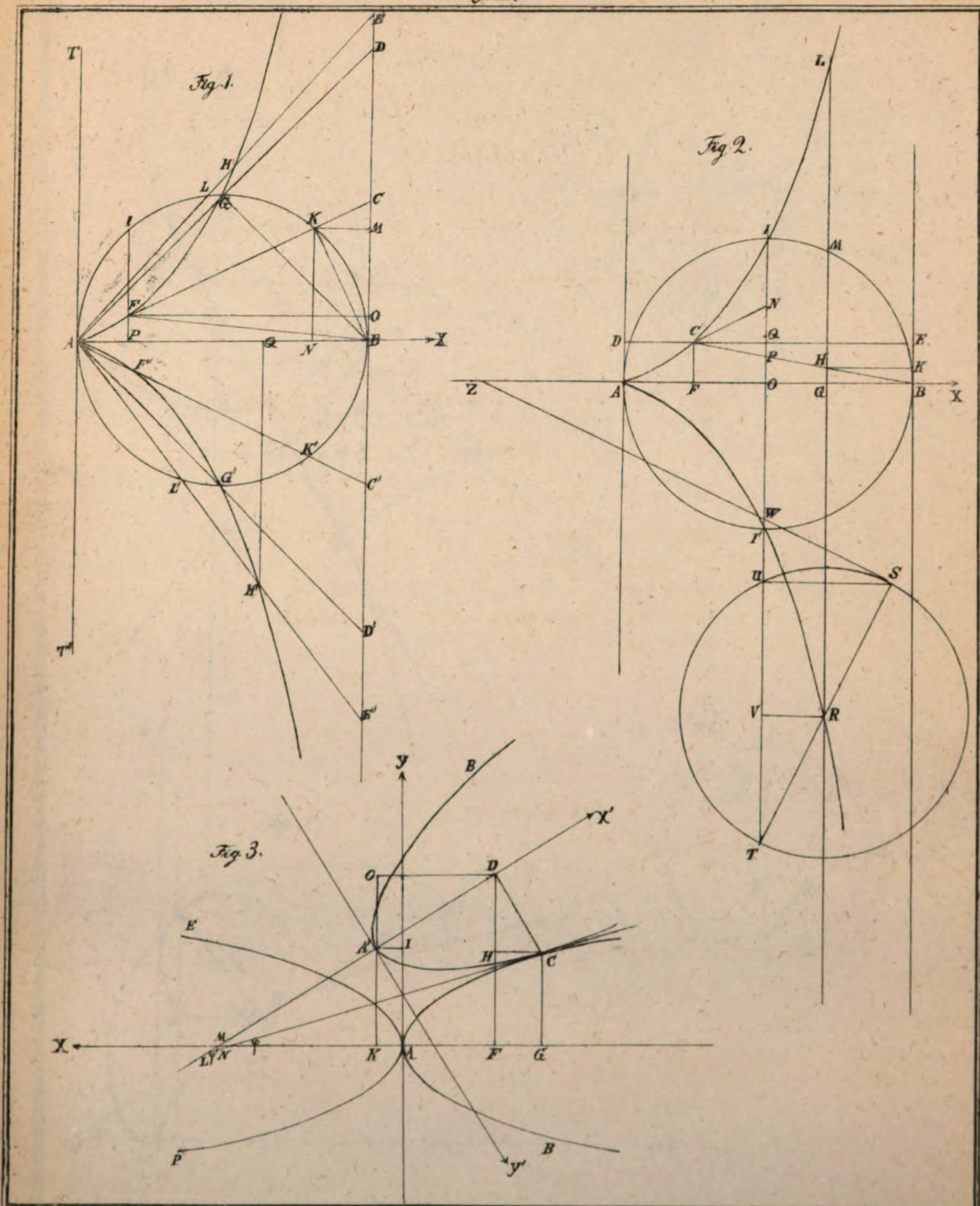

Fig. 1.
T
E
D
H
L
G
C
K
M
I
F
O
A
P
Q
N
B
X
F''
K'
C'
L'
G'
H'
D'
E'
T'
Fig. 2.
L
I
M
N
C
Q
D
E
P
H
K
Z
A
F
O
G
B
X
W
I'
U
S
V
R
T
Fig. 3.
y
B
X'
O
D
E
A'
I
H
C
X
M
L
N
φ
K
A
F
G
P
B
y'

Fig. 4.

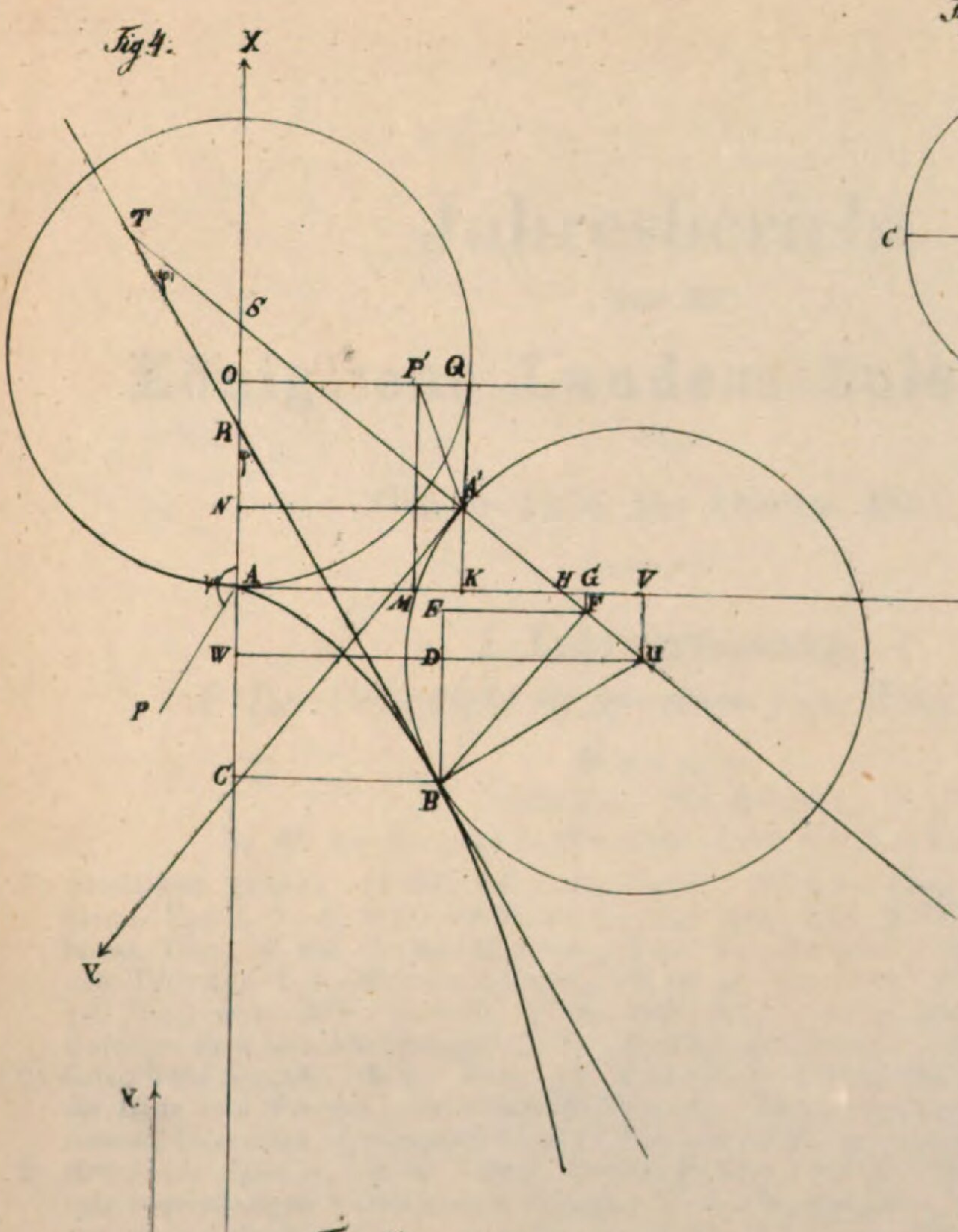


Fig. 6.

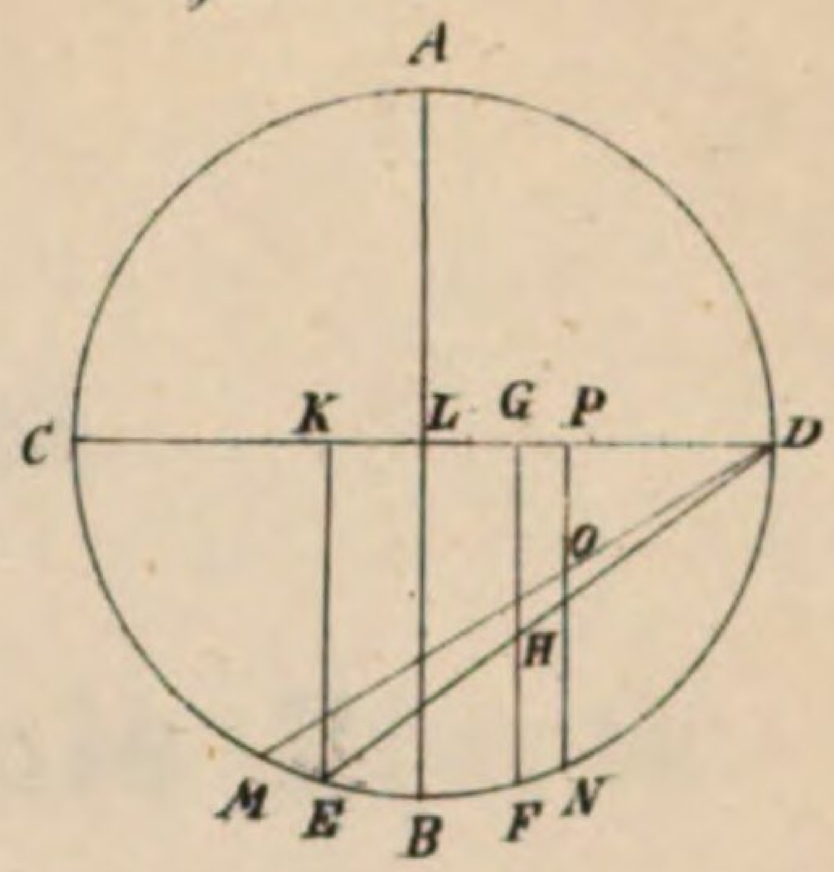


Fig. 7.

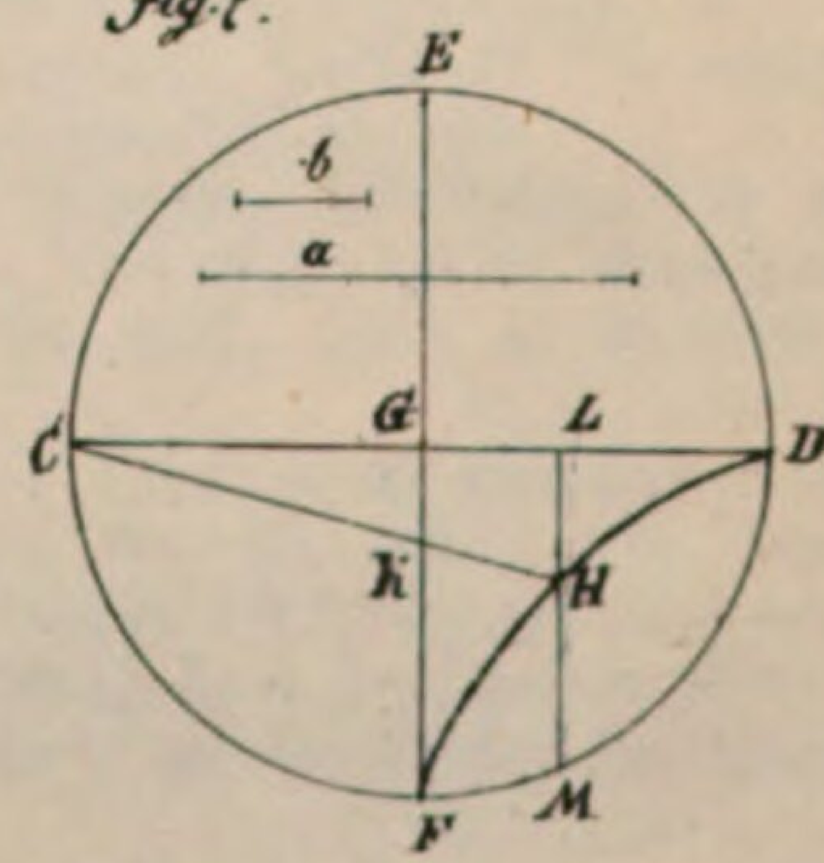
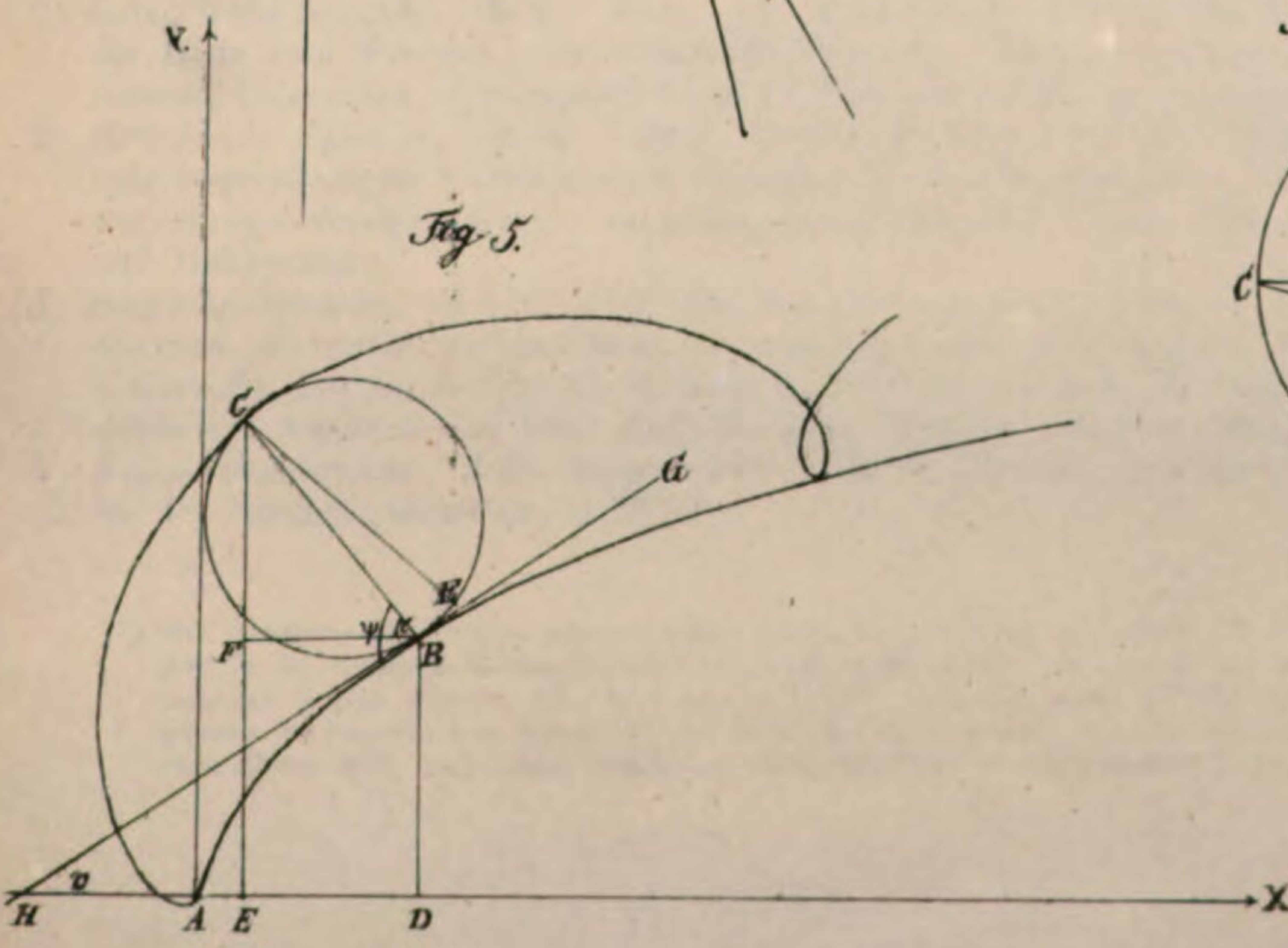


Fig. 5.



Jahresbericht

über die

Königliche Landesschule Pforta

von

Ostern 1856 bis Ostern 1857.

I. Lehrverfassung.

A. Der Unterricht in Sprachen und Wissenschaften.

Prima.

Ordinarius: Der Rector,

im *W.* der Rector in Oberprima, Prof. Keil in Unterprima.*)

1) *Lateinische Sprache.* 10 St. Im *S.* Cic. Brut. c. 21 bis zu Ende (mit einigen Auslassungen), Horat. Ep. II, 1—3, 5 St. der Rector, Tac. Ann. XIII, 1—33, 2 St. Prof. Keil; im *W.* Horat. Carm. I. Sat. I (mit Auswahl), 2 St. der Rector, Abth. I. Cic. de Finn. lib. V und Tac. Ann. I. I—III (mit Auswahl), 5 St. der Rector, Abth. II. Cic. Tuscul. lib. V und Tac. Ann. XIV, 1—50, 5 St. Prof. Keil; im *S.* und *W.* Aufsätze, Exercitien, Extemporalien und Versübungen, 3 St. I. Abth. der Rector, II. Abth. Prof. Keil.

2) *Griechische Sprache.* 6 St. Prof. Dr. Steinhart. Demosthenes drei Olynthische Reden, die Rede vom Frieden, die zweite Philippische; Plato's Protagoras; Sophokles Trachinierinnen; Exercitien, Extemporalien und Uebungen in der griechischen Versification.

3) *Hebräische Sprache.* 2 St. Prof. Buddensieg. Im *S.* Repetition der Grammatik bis zum regelmässigen Verbum, nach Gesenius §. 1—61, Genesis c. IV—VI; im *W.* Repetition der unregelmässigen Verba, nach Gesenius §. 61—77, Psalm 118—134; im *S.* u. *W.* Scripta und Dokimastika.

4) *Deutsche Sprache.* 3 St. Prof. Dr. Koberstein. I. Abth. Uebersicht der Geschichte der neueren deutschen Nationallitteratur von Opitz bis zum Anfang des 19. Jahrh., II. Abth. Uebersicht der Geschichte der älteren d. Nationallitteratur; in beiden Abtheilungen Correctur deutscher Aufsätze und freie Redeübungen, letztere in einer eigens dazu bestimmten Stunde.

5) *Religionsunterricht.* 2 St. Insp. Niese. Im *S.* Lectüre des Briefs an die Römer im Urtext, im *W.* Kirchengeschichte, 2. Theil.

---

*) Die Theilung der Prima, welche schon früher stattgefunden und nach kurzer Unterbrechung im Sommerhalbjahr in der früheren Weise wieder hergestellt worden war, ist seit Michaelis 1856 dahin erweitert worden, dass die Klasse fast für alle lateinischen (8 St.) und deutschen (2 St.) Stunden und ausserdem für den ganzen mathematischen Unterricht in zwei Hälften getrennt ist. In Folge davon hat die Unterprima seit eben dieser Zeit auch einen besondern Ordinarius in der Person des Pofessor Keil erhalten.

6) *Geschichte.* Prof. Dr. Corssen. Im *S.* 2 St. Geschichte des Mittelalters bis zu den Hohenstaufen, im *W.* 3 St. von den Hohenstaufen bis zur Reformation.
7) *Mathematik.* 4 St. Prof. Buchbinder. Im *S.* Theorie der Gleichungen 1. und 2. Grades, Erweiterungen der Kreislehre; im *W.* I. Abth. höhere Reihen, Combinationslehre, Funktionen, binomischer Lehrsatz, II. Abth. Repetition und Erweiterung der Trigonometrie und Stereometrie, Wiederholung der früheren Pensa; in beiden Abth. Correctur schriftlicher Arbeiten und Extemporalien.
8) *Physik.* Prof. Buchbinder. Im *S.* 1 St. Magnetismus, Electricität, Electromagnetismus; im *W.* 2 St. Wärmelehre, Meteorologie.

Ober-Secunda.

Ordinarius: Prof. Dr. Steinhart.

1) *Lateinische Sprache.* 10 St. Cic. Verr. Act. II. L. IV, c. 32—67 und (im *W.*) Lib. V. Vergil. Aen. lib. II. III., Aufsätze, Exercitien, Extemporalien und Versübungen, 8 St. Prof. Steinhart; Livius lib. I und II mit Auswahl, 2 St. im *S.* Dr. Passow, im *W.* Prof. Dr. Corssen.
2) *Griechische Sprache.* 6 St. Dr. Purmann. Im S. Hom. Il. l. X u. XII, Plutarch. Cleom., im *W.* Hom. Il. l. V und VI und Herod. VII, 201 bis zu Ende, VIII, 74—100. IX, 50—76; Scripta und Dokimastika.
3) *Hebräische Sprache.* 2 St. Prof. Buddensieg. Repetition der unregelmässigen Verba nach Gesenius §. 61—77, Scripta, Dokimastika und Lektüre der Geschichte Josephs in Gesenius' Lesebuche.
4) *Deutsche Sprache.* 2 St. Prof. Dr. Koberstein. Im *S.* die Grundlinien der neudeutschen Prosodie und Verskunst; im *W.* Erklärung einiger Stücke aus dem Nibelungenliede. Daneben Aufsätze und metrische Uebungen.
5) *Religionsunterricht.* 2 St. Insp. Niese. Im *S.* der erste Brief des Petrus und der Brief des Jacobus im Urtext gelesen; im *W.* Kirchengeschichte, 1. Theil.
6) *Geschichte.* 3 St. Prof. Dr. Corssen. Römische Geschichte, im *S.* zweite Hälfte vom 2. pun. Kriege an, im *W.* erste Hälfte.
7) *Mathematik.* 4 St. Prof. Dr. Jacobi. Im *S.* die Progressionen und zusammengesetzten Interessen, die Anfänge der ebenen Trigonometrie; im *W.* nach Wiederholung des arithmetischen Sommerpensums die quadratischen Gleichungen und die Lehre von den Logarithmen, Wiederholung der früheren geometrischen Pensa. Daneben in jedem Semester Ausarbeitung schriftlicher Aufgaben.

Unter-Secunda.

Ordinarius: im S. Prof. Keil,
im W. Prof. Dr. Corssen.

1) *Lateinische Sprache.* Im *S.* 12 St., im *W.* 11 St. Im *S.* Cic. de Cn. Pompeji imperio, Ovid. Fast. lib. IV, die Syntaxis ornata nach Zumpt, Extemporalien, Scripta, Dokimastika und lat. Versübungen, zus. 9 St. Prof. Keil, Sallust. Cat. 3 St. Dr. Heine; im *W.* Cic. pro Rosc. Amer., Livius lib. V mit Auswahl, Synt. ornata und schriftliche Uebungen, 8 St. Prof. Dr. Corssen, Ovid. Fast. lib. IV und V und Versübungen, Prof. Keil.
2) *Griechische Sprache.* Im *S.* 5 St., im *W.* 6 St. Dr. Heine. Im *S.* Hom. Od. lib. XX. XXI, Arrian. Anab. l. III bis IV, 8 mit einzelnen Auslassungen, im *W.* Hom. Od. XXII. XXIII, Arr. An. IV, 8—12. 17—V, 2, Moduslehre; daneben in beiden Semestern Scripta und Dokimastika.
3) *Hebräische Sprache.* 2 St. Prof. Buddensieg. Lautlehre und Formenlehre bis zum regelmässigen Verbum einschl., Lese- und Schreibübungen, Paradigmen und leichte Scripta.
4) *Deutsche Sprache.* 2 St. Prof. Dr. Koberstein. Grundlinien des etymologischen Theils

der deutschen Grammatik, nebst einer Uebersicht über die Hauptepochen der Entwickelungsgeschichte unserer Sprache; daneben Correctur deutscher Aufsätze.

5) *Religionsunterricht.* 2 St. Prof. Buddensieg. Im *S.* Geschichte des Reichs Gottes im alten Bunde, 1. Hälfte; im *W.* Repetition des Katechismus, Erläuterung des ersten Hauptstückes, Bibellesen, altes Testament, erste Hälfte. Bibelsprüche und geistliche Lieder.

6) *Geschichte.* 3 St. Griechische Geschichte, im *S.* 2. Hälfte, Prof. Dr. Corssen, im *W.* 1. Hälfte, Dr. Heine.

7) *Mathematik.* 4 St. Prof. Dr. Jacobi. In der Arithmetik im *S.* die Lehre von den Proportionen und deren Anwendung, im *W.* die Potenzen und Wurzelgrössen; in der Geometrie im *S.* die Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren, im *W.* die Hauptsätze von der Aehnlichkeit der Figuren.

Ober-Tertia.

Ordinarius: im S. Prof. Dr. Corssen,
im W. Adj. Dr. Purmann.

1) *Lateinische Sprache.* Im *S.* 12 St., im *W.* 11 St. Im *S.* Caes. de b. C. lib. III mit Auswahl, Tempus- und Moduslehre, Scripta und Dokimastika, 9 St. Prof. Dr. Corssen. Ovid. Met. l. XII mit Auswahl und Versübungen, 3 St. Dr. Heine; im *W.* Caes. de b. C. lib. I und II mit Auswahl, Casus- und Moduslehre, Scripta und Dokimastika, 8 St. Dr. Purmann, Ovid. Met. lib. VII m. A. und Versübungen, 3 St. Prof. Keil.

2) *Griechische Sprache.* 6 St. Dr. Passow. Xenoph. Anab. lib. II. III, cursorisch lib. VI, privatim lib. VII. Unregelmässige Verba und Casuslehre. Scripta und Dokimastika.

3) *Deutsche Sprache.* 3 St. im *S.* Dr. Heine, im *W.* Dr. Purmann. Aufsätze und Uebungen im freien Vortrag und im Lesen.

4) *Religionsunterricht.* 2 St. Insp. Niese. Im *S.* das dritte Hauptstück des Katechismus, im *W.* Lektüre des Evang. Marc. und der Apostelgeschichte.

5) *Geschichte und Geographie.* 3 St. Dr. Heine. Im *S.* brandenburg-preussische Geschichte bis zum J. 1688: im *W.* griechische Geschichte bis 404 v. Chr.*)

6) *Mathematik.* 4 St. Prof. Buchbinder. Weitere Ausführung der Buchstabenrechnung und einfachen Gleichungen, Lehre von der Gleichflächigkeit geradliniger Figuren, Extemporalien, Correctur schriftlicher Arbeiten.

Unter-Tertia.

Ordinarius: im S. Adj. Dr. Purmann,
im W. Adj. Dr. Passow.

1) *Lateinische Sprache.* 11 St. Im *S.* Caes. de B. Gall. VI, 21 bis zu Ende, Ovid. Metam. l. III mit Auswahl, Formenlehre wiederholt und Casuslehre, Prosodie, Scripta, Dokimastika und Versübungen, Dr. Purmann, im *W.* Caes. de b. G. I und (cursorisch) IV, Casuslehre und Einiges aus der Moduslehre, Scripta und Dokimastika, 8 St. Dr. *Passow*, Ovid. Met. IV, 55–166. 416—604, Prosodie und Versübungen 3 St. Dr. Heine.

2) *Griechische Sprache:* 6 St. Adj. Dr. Euler. Repetition der Formenlehre, Verba in *μι*, das Wichtigste vom unregelmässigen Verbum und die Präpositionen; Lektüre der mythologischen Erzählungen in Jacobs' griech. Lesebuch; Scripta und Dokimastika.

---

*) Vom Wintersemester 1856/57 tritt ein neuer Lehrplan für den Geschichtsunterricht in Kraft, wonach künftig in Untertertia die griechische, in Obertertia die römische, in Untersekunda die mittlere, in Obersekunda die neuere Geschichte gelehrt und der Geschichtsunterricht in Prima mit einem Curs der ganzen Weltgeschichte abgeschlossen werden wird. Um diesen Lehrplan nach und nach mit Vermeidung von Nachtheilen für die gegenwärtigen Schüler einzuführen, musste für das laufende Schuljahr in 3 Klassen die griechische Geschichte als Pensum bestimmt werden.

3) *Deutsche Sprache.* 3 St. Grammatik; Uebungen im Vortrag von Gedichten und prosaischen Erzählungen; Leseübungen; Correctur der Aufsätze, im *S.* Prof. Buchbinder, im *W.* Dr. Heine.

4) *Religionsunterricht.* 2 St. Prof. Buddensieg. Im *S.* Geschichte des Reichs Gottes im alten Bunde, 1. Hälfte; im *W.* Repetition des Katechismus, Erklärung des ersten Hauptstücks, Bibellesen, altes Testament, 2. Hälfte. Bibelsprüche und geistliche Lieder.

5) *Geschichte und Geographie.* Im *S.* physische und politische Geographie von Asien, Afrika, Amerika und Australien, 4 St., Prof. Buchbinder; im *S.* physische und politische Geographie von Europa repetitorisch, 2 St., Prof. Buchbinder, griechische Geschichte bis zum J. 404 v. Chr., 3 St. Dr. Heine.

6) *Mathematik.* 4 St. Prof. Dr. Jacobi. Abth. II. Die Anfänge der Buchstabenrechnung und deren einfachste Anwendung; die Lehre von der Congruenz der Dreiecke nebst den unmittelbar daran sich schliessenden Lehrsätzen und Aufgaben; Abth. I. Wiederholung des Pensums der 2. Abtheilung und Uebungen in der Anwendung des Gelernten.

Für das **Französische** bestehen 5 besondere von dem sonstigen Klassensystem getrennte Klassen. In der Regel nehmen nur die Schüler der drei obern Klassen Theil; doch werden auch die Schüler der beiden unteren Klassen zugelassen, wenn sie eine angemessen e Vorbildung für das Französische nachweisen.

Erste Klasse. 2 St. Prof. Koberstein. Correctur schriftlicher Arbeiten und Durchgehen von Extemporalien. Daneben wurde gelesen: im *S.* der Cid von Corneille; im *W.* L'Avare von Molière (in La France Littéraire etc. par Herrig et Burguy).

Zweite Klasse. 2 St. Prof. Koberstein. Grammatische Uebungen, schriftliche und mündliche. Gelesen: im *S.* im 1. Th. des Handbuchs von Ideler und Nolte die Stücke von Raynal, Marmontel, La Harpe und Mercier, im *W.* Histoire de Napoléon par Ségur, Liv. I. chap. 1—4.

Dritte Klasse. 2 St. Dr. Euler. Repetition der unregelmässigen Zeitwörter, Moduslehre; Charles XII par Voltaire, liv. II und III, Scripta und Dokimastika.

Vierte Klasse. 2 St. Dr. Euler. Pronom und regelmässiges und unregelmässiges Zeitwort; Charles XII. liv. I und VIII; Scripta und Dokimastika.

Fünfte Klasse. 2 St. Dr. Passow. Formenlehre bis zum regelmässigen Zeitwort einschl.; Uebungen im Lesen und Uebersetzen aus Leloup franz. Lesebuch; Dokimastika.

Themata zu freien Ausarbeitungen.

A. Lateinische:

I. Ober-Prima. Im S. 1) Eloquentiae Romanae aetates. 2) Quae bello Jugurthino rerum domesticarum in civitatem Romanam inductae sint commutationes? 3) Quo animo (quo consilio) Tacitus Germaniam conscripserit? 4) Caesaris de bello civili commentarios non sine quadam Pompejanarum partium obtrectatione conscriptos esse. 5) Caesar Octavianus rectene ignaviae arguatur. 6) Neronis crudelitas. 7) Eloquentiam rectiusne Cicero dicat (Brut. § 45) pacis otiique alumnam esse an Tacitus (Dial. 36) rerum publicarum perturbatione et licentia ali et exerceri? 8) Quales sub primis Caesaribus mores Romanorum fuerint, secundum Taciti dialogum explicetur.

Im *W.* 1) Rectene Tacitus statuat Tiberium egregium vita famaque fuisse, dum privatus vel cum imperiis sub Augusto esset? 2) Quatuor aetates belli Punici secundi distinguantur. 3) Rectene Cicero propter orationem de Cn. Pompeji imperio habitam levitatis et inconstantiae arguatur? 4) Sallustii narratio de bello Catilinario cum orationibus Ciceronis Catilinariis comparetur. 5) Quid Thucydides de rebus Graecorum antiquissimis doceat? 6) Qua in re Tacitus maximam civis Romani suae aetatis laudem posuerit. 7) Qualis sit apud Homerum Hercules et qualis non sit? 8) Propraetorum Romanorum provincias administrantium crudelitas et lubido ex Ciceronis Verrinis.

II. Unter-Prima. Im *S.* 1) Catilinae oratio in senatu habita, Sallust. Catil. 31. 2) Quid sit, sine ira et studio scribere, Tacit. Ann. I, I. 3) Catonis de coniuratorum supplicio sententia cur potior visa sit senatoribus quam Caesaris, Sall. Cat. 53. 4) Vere Apollinem Pythium praedixisse, Spartam nulla re nisi avaritia perituram, Cic. off. II, 2, 27. 5) Sallustii iudicium, Atheniensium res gestas aliquanto minores fuisse quam fama ferantur, num probari possit Sall. Cat. 8. 6) Falso Horatium ignaviae accusari, quod causam reipublicae levissime deseruerit. 7) Ciceronis illud in Bruto VII, 45 „eloquentiam pacis comitem otiique sociam esse" num recte dictum sit. 8) Herodoti historiam ad epici carminis similitudinem accedere. 9) Ciceronis oratio omnem memoriam discordiarum oblivione sempiterna delendam esse censentis, Philipp. I, I. 10) Pompeii in rempublicam Romanam merita.

Im *W.* 1) Romani num recte magis bellantes quam pacati propitios deos habuisse dicantur, Liv. III, 19. 2) C. Jul. Caesar quo consilio et quo eventu bellum Gallicum gesserit. 3) Tusculanarum disputationum libri I summarium. 4) De Horatio ruris amatore. 5) C. Marii ingenium et mores. 6) Catonis oratio legatos Atheniensium ex urbe removendos esse suadentis. 7) Quae sit mediocritas ab Horatio Carm. II, 10 commendata. 8) Satirae Horatianae I argumentum. 9) De Cicerone Ciliciae praeside.

II. Ober-Secunda. 1) Rectene Cicero (de harusp. resp. c. 19.) dixit, omnibus bonis dolendum fuisse, maxima ornamenta, quibus C. Gracchus excelluerit, non ad meliorem mentem voluntatemque fuisse conversa? 2) De Pisistrati tyranni in rempublicam atticam meritis. 3) De lectionis Georgicorum Vergili utilitate et jucunditate ad amicum epistola. 4) Quam egregie Homerus Ulixi, Phoenicis, Ajacis, Achillis ingenia in orationibus ab iis habitis (Il. IX, 162—655.) expresserit. 5) Quibus de causis M. Porcio Catori Censorio sapientis cognomen datum est? 6) Solo quae bona legibus suis Atheniensibus attulit? 7) De deorum Homericorum natura. 8) Penelopae laudatio.

A. Deutsche:

I. Prima. Im *S.* 1) a. Ist es erlaubt die Worte in Göthes Tasso: „Es bildet ein Talent sich in der Stille, Sich ein Character in dem Strom der Welt", in der ganzen Schärfe des in ihnen ausgedrückten Gegensatzes gelten zu lassen? — b. Warum ist es nicht gut, wenn wir den Umgang der Menschen zu sehr meiden? (Motto: „Die Menschen fürchtet nur, wer sie nicht kennt, Und wer sie meidet, wird sie bald verkennen." Göthes Tasso). 2) a. Wie lässt sich aus der geographischen Lage und aus der Geschichte Deutschlands die grosse Empfänglichkeit seiner Bewohner für die Einflüsse des Auslandes, sowohl auf die Formen des geselligen Lebens, wie auf die Litteratur, erklären? — b. Schilderung des Elfenreichs, wie es in Shakspeare's Sommernachtstraum erscheint. 3) Woher kommt es, dass wir so gern die Ueberbleibsel alter Ritterburgen aufsuchen und vor oder in ihnen verweilen?

Im *W.* 1) a. Freie Wahl eines Thema's. — b. Woraus erklärt es sich, dass die lateinische Sprache in Deutschland erst allein und nachher noch lange vorzugsweise die Sprache der Wissenschaft war? (nach vorhergegangner Besprechung in der Classe). 2) a. Worin besteht das Edle und worin das Tadelnswerthe in dem sittlichen Character und der Handlungsweise des Götz von Berlichingen, wie ihn Göthe dargestellt hat? — b. Characterschilderung des Vaters in Göthes Gedicht „Hermann und Dorothea". 3) Wie sind aus dem Zusammenhange, in welchem sie mit dem Vorhergehenden und Folgenden stehen, die Worte in Göthes Singspiel „Erwin und Elmira" zu erklären? „Es fehlt der Mensch, und darum hat er Freunde". 4) Woher kommt es, dass Freundschaften leichter und schneller im Jünglings- als im Mannesalter geschlossen zu werden pflegen?

II. Ober-Secunda. Im *S.* 1) Ein metrischer Versuch, wobei die Wahl des Gegenstandes und der Versart freigelassen blieb. 2) Versuch einer Characterschilderung des Tellheim in Lessings „Minna von Barnhelm". 3) Inwiefern ist es im Unglück ein Trost, Leidensgenossen zu haben?

Im *W.* 1) Wer ist mein Lieblingsdichter, und warum finde ich so grosses Gefallen an ihm? 2) Angabe der Hauptgliederung und des ganzen Gedankenganges in Schillers „Lied von der

Glocke". 3) Der Frauensand (deutsche Sagen der Brüder Grimm) metrisch bearbeitet. 4) Warum können auch überstandene Widerwärtigkeiten und Leiden in der Erinnerung angenehm sein?

III. Unter-Secunda. Im *S.* 1) Welche Freuden und Genüsse bietet uns vor den übrigen Jahreszeiten der Frühling? 2) Der Inhalt von Schillers „Taucher" als Prosaerzählung. 3) Welche Vorzüge hat der Aufenthalt in einer grossen Stadt vor dem auf dem Lande, und in welcher Jahreszeit treten dieselben besonders hervor?

Im *W.* 1) Welche Vergnügungen und Genüsse bietet uns der Herbst vor den übrigen Jahreszeiten? 2) Brief an einen Freund, dem über die im verwichenen Sommer zu Pforta angefangenen und ausgeführten Bauten berichtet wird. 3) Der Inhalt von Schillers „Gang nach dem Eisenhammer" als Prosaerzählung. 4) Welche Vorzüge hat, ausser im Winter, der Aufenthalt auf dem Lande vor dem in einer grossen Stadt?

B. Unterricht in den Künsten.

1) *Musik und Gesang.* a) Der Gesangunterricht, unter Leitung des Cantors und Musikdirectors Seiffert, ist für alle öffentlich. Sämmtliche Schüler, welche nicht zum Kirchenchor gehören, sind in 5 Singklassen vertheilt, von denen jede wöchentlich eine Unterrichtsstunde hat. Eine Auswahl von allen bildet den Kirchenchor, aus zwei Abtheilungen von etwa 50 Sängern bestehend, unter zwei Praecentoren, welcher beim Gottesdienst die Gesänge zur Liturgie und bei andern öffentlichen Gelegenheiten die Gesangpartieen ausführt. 1 St. wöchentlich und ausserordentliche Stunden nach Bedürfniss. — b) Der Unterricht in der Instrumentalmusik wird theils vom hiesigen Musikdirector, theils von Musikern aus Naumburg privatim ertheilt.

2) *Zeichenunterricht.* Der öffentliche Zeichenunterricht, welcher früher auf die Schüler von Ober- und Untersecunda beschränkt war, ist seit dem Sommer 1856 in der Weise auf sämmtliche Klassen mit Ausnahme von Untertertia ausgedehnt worden, dass alle Schüler derselben, welche Anlage und Neigung zum Zeichnen haben, daran Theil nehmen. Mit Ostern d. J. ist noch eine vierte Zeichenklasse errichtet und dadurch auch für die Untertertianer die Betheiligung möglich gemacht worden. Jede der 4 Klassen hat zwei wöchentliche Lehrstunden, worin sie sowohl in den Gesetzen der Perspective unterrichtet, als practisch in den verschiedenen Gattungen des Zeichnens geübt werden. Alle Zöglinge haben Gelegenheit, sich durch Privatunterricht weiter fortzubilden.

3) *Schreibunterricht.* Der Unterricht in der Schreibkunst, welchen der hiesige Kirchner und Schreiblehrer Karges ertheilt, und bei welchem im Deutschen und Lateinischen die Vorschriften von Heinrigs, im Griechischen die von Grasshoff zum Grunde gelegt werden, ist auf die Schüler von Ober- und Unter-Tertia beschränkt, welche in vier Abtheilungen, wovon jede wöchentlich eine Lehrstunde hat, getheilt sind. Die guten Schreiber können vom Klassenlehrer dispensirt, die schlechten zum Besuch beider Abtheilungen ihrer Klassen angehalten werden.

4) *Tanzunterricht.* Dieser Unterricht ward während der 6 Wintermonate, vom October bis März, auf welche er zur Zeit beschränkt ist, von dem Tanzlehrer Bartels aus Naumburg in 12 wöchentlichen Lehrstunden ertheilt. Zu dem Behufe sind sämmtliche Zöglinge in 12 Abtheilungen gebracht, von denen jede wöchentlich eine Stunde hat. Die Uebungen sind nach einer methodischen Stufenfolge vom Leichteren zum Schwereren geordnet, wobei in den untersten Abtheilungen die Regeln des äussern Anstandes in der Haltung und den Bewegungen des Körpers, als Grundlage des gesammten Tanzunterrichts, gelehrt und eingeübt werden.

5) Die *gymnastischen Uebungen*, an welchen sämmtliche Zöglinge Theil nahmen, wurden von dem Adj. Dr. Euler geleitet und fanden wöchentlich zweimal im Sommer auf dem Turnplatze des Schulgartens, im Winter in 2 Abtheilungen im Turnsaale statt. Auch wurde den Alumnen von Dr. Euler Schwimmunterricht nach der Pfuelschen Methode ertheilt.

6) Die *botanischen Excursionen* wurden auch in dem verflossenen Sommer unter Führung des Schreiblehrers Karges fortgesetzt. Auch Prof. Buchbinder hat sich durch Führung einer besonderen Abtheilung an diesen Excursionen betheiligt.

II. Verordnungen der vorgesetzten hohen Behörden

Durch Circulare des Königl. Provinzial-Schulcollegiums vom 18. April v. J. wird auf Grund eines Rescripts des Herrn Unterrichtsministers vom 10. April v. J. ein methodisches Auswendiglernen lateinischer und griechischer Vocabeln empfohlen.

Durch Circulare des Königl. Prov.-Schulcollegiums vom 17. Mai v. J. wird darauf aufmerksam gemacht, dass nach Bestimmung des Herrn Unterrichtsministers solche Candidaten, welche bei der Prüfung pro facultate docendi ungenügende Kenntnisse in der Religionswissenschaft zeigen, erst dann angestellt werden sollen, wenn sie auch in der Religionswissenschaft genügende Kenntnisse dargethan, und dass alle Candidaten des höheren Schulamts bei ihrer Anmeldung zur Prüfung pro facultate docendi sich darüber auszusprechen haben, auf welchem Wege sie sich diese Kenntnisse erworben. Diess soll den Abiturienten bekannt gemacht werden, welche sich dem höheren Lehrfache widmen wollen.

Nach Verfügung der hohen Behörden vom 9. resp. 3. Juli v. J. soll den Schulnachrichten in den Programmen eine tabellarische Uebersicht der Lehrer und Lectionen nach einem bestimmten Muster beigefügt werden.

Hinsichtlich der Abiturientenprüfung wird durch Circulare des Königl. Prov.-Schulcollegiums vom 10. Juli v. J. in Erinnerung gebracht, dass Wörterbücher nur bei dem lateinischen Aufsatze, aber nicht bei den lateinischen, griechischen und französischen Scriptis gestattet seien. Wenn in diesen letztern Wörter oder Phrasen vorkommen, welche bei den Examinanden billiger Weise nicht als bekannt vorausgesetzt werden können, so dürfen sie zwar den Examinanden suppeditirt, müssen aber in diesem Falle auch über den deutschen Text geschrieben werden.

Anordnung vom 12. September, resp. 9. August, dass von denjenigen Schulprogrammen, deren wissenschaftliche Abhandlung einen Theil der Geschichte Deutschlands oder Preussens zum Gegenstande hat, bald nach deren Erscheinen ein Exemplar an das Directorium der Königl. Staatsarchive eingesendet werden soll.

Durch Circulare des Königl. Prov.-Schulcollegiums vom 24. October v. J. werden die Directoren und Lehrercollegien aufgefordert, den Lehr- und Lectionsplan in Gemässheit der Ministerialverfügung vom 7. Januar v. J. einer gründlichen Revision zu unterwerfen.

Durch Rescript vom 7. Novbr. v. J. wird der vorgelegte Lehr- und Lectionsplan für 1856/57 im Wesentlichen genehmigt. Hinsichtlich des Zeichenunterrichts wird ebendaselbst angeordnet, dass derselbe auch auf Untertertia und zwar hier als obligatorischer Unterrichtsgegenstand auszudehnen sei.

Durch Rescript vom 13. December v. J. wird die Erlassung einer besondern Bekanntmachung an die Väter unserer Zöglinge oder Stellvertreter derselben in Betreff der Zusendungen von Geld genehmigt.

Durch Rescript vom 12. Februar d. J. wird den Directoren in Erinnerung gebracht, dass nach §. 13 der Instruction vom 21. Januar 1822 über die Prüfung der zum einjährigen freiwilligen Militairdienst sich meldenden jungen Leute Schüler aus den drei ersten Klassen eines Gymnasiums alsdann von der wissenschaftlichen Prüfung befreit werden können, wenn sie durch ein Zeugniss der Schuldirection beweisen, dass sie nach einer mit ihnen vorgenommenen Prüfung in allen Zweigen des Schulunterrichts einen solchen Grad wissenschaftlicher Vorbildung bekundet haben, der erwarten lässt, dass sie sich den Wissenschaften mit Nutzen widmen werden. Hiernach werden die Directoren angewiesen, sich in den Abgangszeugnissen solcher jungen Leute, welche die Vergünstigung des einjährigen Militairdienstes in Anspruch zu nehmen gedenken, bestimmt über den Grad ihrer wissenschaftlichen Bildung auszusprechen.

Durch Rescript vom 27. Februar ist dem Antrag des Lehrercollegiums gemäss verordnet worden, dass die grossen Sommerferien um etwa 14 Tage hinausgeschoben werden sollen. Dieselben werden sonach von diesem Jahre an immer am ersten Sonnabend nach dem 6. Juli beginnen.

Da bei der bisherigen Einrichtung hinsichtlich der Aufnahme von Zöglingen auf unserer Anstalt immer eine Anzahl von Stellen nicht zur Besetzung gelangt ist, indem theils einzelne geladene Schüler in Folge eingetretener Hindernisse nicht erschienen, theils einzelne andere die

Prüfung nicht bestanden, theils endlich auch noch unmittelbar vor der Receptionsprüfung durch Abgang Stellen erledigt wurden: so hat das Königl. Prov.-Schulcollegium auf Antrag des Lehrercollegiums beschlossen, dass in Zukunft ausser den definitiven Verleihungen immer noch eine entsprechende, höchstens auf 10 steigende Anzahl von Stellen bedingungsweise an solche Knaben verliehen werden soll, welche eventuell zur Prüfung vorgeladen und nur dann aufgenommen werden sollen, wenn auf die bezeichnete Art noch Stellen zur Erledigung kommen. Diese Entschliessung der hohen Behörde ist dem Rector durch Rescript vom 6. April d. J. eröffnet worden.

Durch Rescript vom 10. April d. J. ist genehmigt worden, dass die Extraneer in Zukunft am Geburtstag Sr. Majestät des Königs an dem Festmahle der Alumnen Theil nehmen.

III. Chronik der Landesschule.

Das verflossene Schuljahr hat am 27. und 28. März v. J. mit der Aufnahmeprüfung begonnen, durch welche 23 Zöglinge aufgenommen wurden. Die Nachreception fand am 14. April statt. Bei dieser wurde 1 Zögling aufgenommen.

Am 9. April wurde, wie schon im vorigen Programm berichtet worden, der unterzeichnete Rector in sein Amt eingeführt.

Am 21. Mai wurde das Stiftungsfest in der üblichen Weise begangen. Das Einladungsprogramm dazu enthält eine dogmatisch-exegetische Abhandlung des Prof. Buddensieg über Gottes Wort und die Wiederbringung aller Dinge. Die Prämien erhielten: a) aus Prima: *Eduard Meyer,* Gallus von Becker, 3 Bände; *Vincenz Korschewitz,* Gesenius lexicon hebr.-chald.; *Wilhelm Schirks,* Charikles von Becker, 3 Bde.; *Bernhard Drassdo,* Lat. Stilistik von Nägelsbach; b) aus Ober-Secunda: *Hermann Stiller,* Horatius von Bentley; *Carl Jahns,* Horat. Sat. von Heindorf-Wüstemann; c) aus Unter-Secunda: *Rudolph Scheller,* Hermanns Staatsalterthümer; *Wilhelm von Kirchbach,* Preller's griechische Mythologie; d) aus Ober-Tertia: *Walter Potel,* Luthers Leben von Pfizer; *Otto Korschewitz,* Yorks Leben von Droyssen; e) aus Unter-Tertia: *Eugen Bormann,* elf Bücher deutscher Dichtung von Gödecke; *Hermann Lüttich,* Humboldts Ansichten der Natur.

Vom 14. bis 18. Juni besuchte Herr Prov.-Schulrath Wendt die Anstalt, um eine eingehende Revision derselben vorzunehmen.

Hieran schloss sich am 22. Juni ein Besuch des Herrn Oberpräsidenten von Witzleben, wobei namentlich die Lokalitäten einer sorgfältigen Prüfung und Berathung unterworfen wurden.

In den grossen Sommerferien, welche der bisherigen Ordnung gemäss vom 22. Juni bis zum 27. Juli gedauert haben, wurden in dem Schulhause mehrere Verbesserungen vorgenommen, unter welchen besonders die neue Dekoration des Speisesaals und das Tapezieren sämmtlicher Schülerstuben hervorzuheben ist.

Der Speisesaal erhielt noch einen besonderen Schmuck durch das werthvolle Geschenk, durch welches Sr. Excellenz der Herr Minister von Raumer die Lehrer und Schüler der Anstalt erfreut hat, nämlich durch die Büsten Sr. Majestät des jetzt regierenden Königs, so wie der Könige Friedrich Wilhelm III., Friedrich II. und des grossen Kurfürsten. Dieselben wurden am Geburtstage Sr. Majestät des Königs unter angemessener Feierlichkeit aufgestellt.

Ausserdem hat Herr Kunstlehrer Eichler, ein dankbarer Zögling der Pforte, dem dieselbe bereits die im vorigen Jahre genannten Kunstwerke verdankt, die beiden Bas-Reliefs von Thorwaldsen, die Nacht und der Morgen, der Anstalt geschenkt, die ebenfalls im Speisesaale aufgestellt worden sind und die Ausschmückung desselben in dankenswerther und erfreulicher Weise vollendet haben.

Die Abiturientenprüfung wurde am 5. September mit 9 Zöglingen der Anstalt gehalten, von denen 8 das Zeugniss der Reife erhielten. Am 10. September fand die feierliche Entlassung der Abiturienten durch den Rector statt.

An diesem eben genannten Tage traf Sr. Excellenz der Herr Minister von Raumer zu einem Besuche der Anstalt ein. Hochderselbe verweilte bis zum 11. September und hat während

dieser Zeit nicht nur von den Lokalen und Einrichtungen der Anstalt genaue Kenntniss genommen, sondern auch einem grossen Theile der Lehrstunden beigewohnt.

Durch Rescript vom 16. September wurde dem Rector eröffnet, dass dem bisherigen Schularzt, Herrn Dr. Söchting, die nachgesuchte Pensionirung gewährt und der Stabsarzt a. D. Herr Dr. Zimmermann zu Dürrenberg an seiner Stelle zum Schularzt ernannt worden sei. Letzterer ist in der Mitte des Monats October in sein neues Amt eingetreten.

Am 15. October wurde der Geburtstag Sr. Majestät des Königs in der gewohnten feierlichen Weise begangen. Die Festrede hielt Professor Buchbinder über die Unionsbestrebungen Preussens seit Friedrich dem Grossen.

Der Tag der Schlacht bei Leipzig wurde am 18. October in herkömmlicher Weise durch eine Festrede, welche Professor Keil hielt, und durch Deklamationen und Vorträge der Schüler gefeiert.

Am 23. November, dem Tage des allgemeinen Todtenfestes, wurde dem Herkommen gemäss das feierliche Ecce für folgende Zöglinge der Anstalt begangen:

1) *Franz Ludwig Hildenhagen* aus Kölleda, 1818—1822 in Pforta, starb als lutherischer Prediger in der Krimm. 2) *Christian Friedrich Wilhelm Scherell* aus Sangerhausen, Extraneer 1787—1791, starb am 26. December 1855 als pensionirter Justitiar und Hofrath in Leipzig. 3) *Christian Carl Keil* aus Weissenfels, Alumnus 1821—1827, starb als Rechtsanwalt am 5. Januar v. J. in Eisleben. 4) *Friedrich Heinrich Damm* aus Kölleda, Alumnus 1830—1834, starb als Kaufmann am 23. Januar v. J. in Magdeburg. 5) *Emil Junghans* aus Tennstädt, Alumnus 1841 — 1845, starb als Lieutenant im 4. Artillerieregiment am 9. April v. J. in Erfurt. 6) *Christian August Krafft* aus Niedertrebra, Alumnus 1802—1808, starb als Schularzt in Rossleben am 21. Mai v. J. 7) *Moritz Ferdinand Weidauer* aus Buchholz bei Annaberg, Alumnus 1810—1815, starb am 29. Mai v. J. als Pastor in Buchholz. 8) *Rudolph Stürenburg* aus Aurich, Extraneer 1827—1830, starb am 8. Juni v. J. als Director des Gymnasiums in Hildburghausen. 9) *Gottfried Wilhelm Tröltzsch* aus Lengefeld, Alumnus 1783—1787, starb als emeritirter Pastor zu Lengefeld am 9. Juni v. J. 10) *Eduard Mehner* aus Mühlberg, Alumnus 1815—1821, starb als Pastor von Schlettau in Lauchstädt am 9. Juli v. J. 11) *Heinrich Gottlieb Reichard* aus Lobenstein, Alumnus 1803—1809, starb als Geheimer Justizrath in Gera den 2. September v. J. 12) *Gustav Emil Walter Gerloff* aus Wittenberge, Alumnus 1848—1850, starb als Unterofficier in Rathenow am 13. September v. J. 13) *Ludwig Puttrich* aus Dresden, Alumnus 1795—1800, starb als Oberhofgerichts- und Consistorial-Advokat in Leipzig. 14) *Karl August Hähnel* aus Elbersdorf, Alumnus 1815—1820, starb als Gerichtsamtmann in Radeberg am 7. October. 15) *Friedrich Moritz Langerhanns* aus Heldrungen, Alumnus 1818—1824, starb am 12. October als Kreisgerichtsdirector in Greifswald. 16) *Johann Heinrich Krugmann* aus Driessen, Alumnus 1840—1845, starb als Assessor in Berlin. 17) *Johann Theodor Hermann Gross* aus Jüterbogk, Alumnus 1833—1839, starb als praktischer Arzt am 6. November. 18) *Otto Ludwig von Münchow* aus Bonn, Extraneer 1839—1845, starb als Assessor in Oppeln am 6. November.

Durch Rescript des Königl. Provinzial-Schulcollegiums vom 12. December wurde dem Rector eröffnet, dass dem Antrag des Lehrercollegiums gemäss ein Beitrag von 100 Thlr. jährlich zu den Reisekosten einzelner bedürftiger Schüler verwilligt worden sei, wodurch einem längst gefühlten Bedürfnisse in erfreulicher Weise genügt worden ist.

Die Weihnachtsferien wurden Lehrern und Schülern schmerzlich getrübt durch die schwere Krankheit und durch den am 28. December erfolgten Tod eines unserer Zöglinge, *Eduard Moshagen* aus Brilon in Westphalen, eines von seinen Lehrern wie von seinen Mitschülern geliebten, fleissigen und wohlgesitteten Knaben. Er wurde am 31. December von seinen Mitschülern zu Grabe getragen und am 4. Januar d. J. wurde ihm nach der Rückkehr der verreisten Schüler von seinem Tutor, dem Adjunct Dr. Purmann, das Ecce gehalten.

Dem Schulaufwärter Vogel wurde zu seinem funfzigjährigen Jubiläum in Anerkennung seiner treuen Dienste durch Rescript vom 19. Februar d. J. das allgemeine Ehrenzeichen verliehen.

Am 9—12 März wurden wir wieder durch einen Besuch des Herrn Provinzial-Schulrath Wendt erfreut. Unter seinem Vorsitz wurde am 10. März die Abiturientenprüfung gehalten, an welcher 13 Zöglinge der Anstalt Theil nahmen. Dieselben erhielten alle das Prädikat der Reife. Die übrige Zeit wurde von dem Herrn Provinzial-Schulrath theils zu Klassenbesuchen theils zu Berathungen mit dem Lehrercollegium verwandt.

Um dieselbe Zeit wurden dem Lehrercollegium in zweien seiner Mitglieder Auszeichnungen zu Theil, indem unter dem 18. März dem Professor Koberstein von der philosophischen Fakultät zu Breslau honoris causa das Doctordiplom verliehen wurde und zwar, wie es in demselben heisst: in administrando scholastico munere summa cum laude versato quod Germanicarum literarum historiam studio diuturno et fructuosissimo exploravit librisque egregiis illustravit, und indem der Adjunct Dr. Corssen durch Rescript vom 31. des gen. Monats zum Professor ernannt wurde.

Noch ist endlich zu erwähnen, dass durch Rescript vom 6. August v. J. die Vertheilung des bei dem Rectorat während der Vakanz ersparten Gehaltes unter die Lehrer genehmigt, dass ferner auch in diesem Jahre für die Unterbedienten Gratifikationen im Gesammtbetrag von 100 Thlr. verwilligt und dass dem Zeichenlehrer Hossfeld wegen der durch die Erweiterung des Zeichenunterrichts für ihn herbeigeführten Mehrarbeit durch Rescript vom 10. März d. J. eine Gehaltszulage von 60 Thlr. gewährt wurde.

IV. Statistische Uebersichten.

A. Gesammtfrequenz der Anstalt.

In	I.	II.a	II.b	III.a	III.b	Summa.
Nach Ostern 1856 waren	42	32	36	35	44	189
Davon gingen ab von Ostern bis Michaelis 1856	9	2	4	—	2	17
Es waren zu Michaelis 1856 nach Abgang der Abiturienten	33	30	32	35	42	172
Es wurden versetzt aus	—	11	16	17	17	61
Es wurden aufgenommen: Versetzte	11	16	17	17	—	61
Es wurden aufgenommen: Novitien	—	—	1	3	15	19
Nach Michaelis 1856	44	35	34	38	40	191
Von Michaelis 1856 bis Ostern 1857 gingen ab	14	6	4	2	6	32
Es waren zu Ostern 1856 nach Abgang der Abiturienten	30	29	30	36	34	159
Es wurden versetzt aus	—	12	11	13	16	52
Es wurden aufgenommen: Versetzte	12	11	13	16	—	52
Es wurden aufgenommen: Novitien	—	1	2	2	21	26
Nach Ostern 1857	42	29	34	41	39	185

B. Abgegangen zur Universität, nach bestandener Maturitätsprüfung.

Namen.	Geburtsort.	Alter.	Schulzeit überh.	Schulzeit in I.	Prädikat.	Studium.	Universität.
a. Michaelis 1856.							
1) *Ernst Heinsius*	Naumburg	19 J.	$5^1/_2$ J.	2 J.	Reif	Jura u. Cam.	Berlin.
2) *Eduard Meyer*	Sangerhausen	19 -	$5^1/_2$ -	2 -	Reif	Jura u. Cam.	Jena.
3) *Carl Koberstein*	Pforta	$21^1/_2$ -	$7^1/_2$ -	2 -	Reif	Schauspieler	—
4) *Rudolph Voigt*	Weissensee	21 -	$6^1/_2$ -	2 -	Reif	Jura	Halle.
5) *Carl Bormann*	Hagen	$19^1/_2$ -	6 -	2 -	Reif	Baufach	—
6) *Eduard Korschewitz*	Bachra	$19^1/_2$ -	$5^1/_2$ -	2 -	Reif	Theologie	Halle.
7) *Ottomar Günther*	Gräfenhainichen	$19^1/_2$ -	$6^1/_2$ -	2 -	Nicht reif	—	—
8) *Gustav Steuer*	Reppen	$19^1/_2$ -	$4^1/_2$ -	2 -	Reif	Theologie	Halle.
9) *Ernst Scholle*	Reppen	$19^1/_2$ -	$5^1/_2$ -	2 -	Reif	Geschichte u. deutsch. Phil.	Berlin.

Namen.	Geburtsort.	Alter.	Schulzeit überh.	Schulzeit in I.	Prädikat.	Stunden.	Universität.
b. Ostern 1857.							
1) *Eduard Sachsenröder*	Lübben	20 J.	$5^1/_2$ J.	2 J.	Reif	Theologie	Halle.
2) *Ludwig Heinicke*	Quartschen bei Küstrin	$21^1/_2$ -	$5^1/_2$ -	2 -	Reif	Theologie	Halle.
3) *Hilmar von Borcke*	Potsdam	$19^3/_4$ -	$6^1/_2$ -	2 -	Reif	Jura	Halle.
4) *Ernst Textor*	Sarnow b. Wollin	20 -	6 -	2 -	Reif	Theologie	Halle.
5) *Hermann Kunze*	Zeppernick	20 -	$6^1/_2$ -	2 -	Reif	Theologie	Halle.
6) *Oskar Jäger*	Kl.-Oschersleben bei Magdeburg	$20^1/_2$ -	7 -	2 -	Reif	Theologie	Halle.
7) *Ernst Eck*	Berlin	$18^1/_2$ -	6 -	2 -	Reif	Jura	Berlin.
8) *Hugo Müller*	Kemberg	20 -	$5^1/_2$ -	2 -	Reif	Theologie	Leipzig.
9) *Wilhelm Schircks*	Chur	$20^1/_2$ -	5 -	2 -	Reif	Bergwissenschaft	—
10) *Paul Heydenreich*	Berlin	20 -	$6^1/_2$ -	2 -	Reif	Theologie	Berlin.
11) *Heinrich Peter*	Meiningen	18 -	1 -	1 -	Reif	Geschichte u. Philologie	Breslau.
12) *Carl Wachsmuth*	Naumburg	21 -	6 -	2 -	Reif	Theologie	Halle.
13) *Adalbert Merx*	Bleicheroda	18 -	$5^1/_2$ -	2 -	Reif	Theologie u. oriental. Sprache	Berlin.

C. Ausserdem sind abgegangen:

a) aus Prima: *Gustav Frenzel* aus Berlin; b) aus Ober-Secunda: *Otto Treutmann* aus Cosel, *Robert Ulrich* aus Benninghausen, *Emil Erler* aus Niemegk, *Carl Dietrich* aus Kalau, *Hermann Knauth* aus Grunow, *Max von Witzleben* aus Quedlinburg, *Oscar Töttler* aus Sangerhausen; c) aus Unter-Secunda: *Otto Manitius* aus Wittenberg, *Emil Zimmermann* aus Weissenfels, *Richard Winkel* aus Raumland, *Robert Schulze* aus Schkeuditz, *Bernhard Vogel* aus Naumburg, *Eduard Istrich* aus Naumburg, *Wilhelm Rose* aus Freiburg; d) aus Ober-Tertia: *Friedrich Schröder* aus Alvensleben, *Julius Hirt* aus Thamsbrück; e) aus Unter-Tertia: *August Karges* aus Oberbösa, *Paul Koberstein* aus Stettin, *Karl Lohse* aus Kösen, *Karl Ruhbaum* aus Rathenow, *Gisbert von Bonin* aus Genthin, *Maximilian von Mandelsloh* aus Langensalza, *Felix von Fischer-Treuenfeld* aus Naumburg.

Zwei Zöglinge, 1 aus Ober-Secunda und 1 aus Unter-Secunda, wurden wegen ungeziemenden Betragens von der Anstalt entfernt.

D. Verzeichniss der Alumnen und Extraneer.

Ober-Prima.

I. Ordnung.

August Trümpelmann I. aus Ilsenburg. Fam. Prof. Buddensieg. Fam. comm. I. Praec. I. Insp.

Ferdinand Jacob aus Pforta. Fam. Prof. Keil. Insp.

Bernhard Drassdo aus Mescheda. Fam. Prof. Steinhart. Insp.

Georg von Bosse aus Kalau. Fam. Prof. Jacobi. Insp.

Alfred Wetzel I. aus Röcken. Insp.

Edmund von Wittken. Fam. Dr. Heine. Insp.

Albrecht Richter aus Tammendorf. Fam. Prof. Buchbinder. Insp.

Victor Kranold aus Eilenburg. Insp.

Arthur Auwers aus Göttingen. Extr. Prof. Jacobi.

Ludwig Landsberger aus Breslau. Extraneer Dr. Purmann.

II. Ordnung.

Herm. Stiller aus Wahlstadt. Fam. Insp. Niese. Insp.
Aug. Mylius aus Weissenfels. Fam. Dr. Euler. Insp.
Eduard Rathmann I. aus Wernigerode. Insp.
Paul Böhme I. aus Halle. Insp.
Paul von Wittern aus Seelow. Insp.
Heinrich Krause aus Stettin. Insp.
Adolph Jacobi I. aus Graudenz. Fam. Dr. Passow. Fam. comm. II. praec. II. Insp.
Emil Otto I. aus Mansfeld.
Carl Jänisch aus Tennstädt.
Wilhelm Schrader aus Halle in Westph. Fam. Rector Dr. Peter.

Unter-Prima.

I. Ordnung.

Cölestin Göhring I. aus Glogau.
Hermann Kettner aus Burg.
Hermann Textor aus Cammin.
Albert Dortschy aus Strassburg in der U.-M. Fam. Prof. Koberstein.
Paul Geitel aus Haynau. Fam. Dr. Purmann.
Friedr. Gottlöber aus Cölleda. Fam. Prof. Corssen.
Rudolph Meissner aus Delitzsch.
Friedrich Stiehl aus Neuwied.
Richard Wachsmuth aus Naumburg.
Carl Jahns aus Kochstädt. Organist.

II. Ordnung.

Oscar Weiss aus Langensalza. Extraneer Prof. Koberstein.
Richard Trommsdorf aus Langensalza.
Georg Schleussner I. aus Kemberg.
Otto Kraft I. aus Lossa.
Rudolph Scheller aus Querfurt.
Albert Harras aus Weissensee.
Hermann Schreyer aus Torgau.
Theodor Barthold aus Teuditz.
Wilhelm Schmidt I. aus Erfurt.
Paul Hanke aus Eilenburg.
Julius Vörkel aus Delitzsch.
Heinrich Block aus Tennstädt.

Ober-Secunda.

I. Ordnung.

Richard Reuter I. aus München.
Alexander Diesterweg aus Orsoy.
Carl Jacobi II. aus Pforta. Extraneer Prof. Jacobi.
Wilhelm von Kirchbach aus Friedland. Extraneer Prof. Koberstein.
Adolph Müller I. aus Ravicz.
Hasso von Flemming aus Basentin. Extraneer Prof. Buddensieg.
Hermann Pabst aus Burg.
Adalbert von Neumann aus Hanseberg. Extraneer Prof. Koberstein.
Hartmann Besser aus Wiehe.
Philipp Heydenreich aus Sonneburg.
Otto Müller II. aus Weissenfels.
Carl Wolff aus Langensalza.
Oscar Krämer aus Elsterwerda.
Friedrich Schünemann aus Mansfeld.
Ernst Klocke aus Siersleben.
Ferdinand Rathmann II. aus Delitzsch.

II. Ordnung.

Bernhard Herzog aus Schkeuditz.
Walter Potel aus Uftrungen.
Hermann Mey aus Langensalza.
Wilhelm Bergmann aus Berleburg.
Eugen Schöppenthau aus Jauer.
Otto Liebmann aus Löwenberg.
Adolph Grunow aus Jüterbogk.
Hermann Eilert aus Sangerhausen.
Wilhelm Borges aus Höxter.
Georg von Götz aus Hohenbocka.
Albert Thiemich aus Annaburg.
Alphons von Maltitz aus Altrosenberg.
Ernst von Gersdorf aus Weimar. Extraneer Prof. Koberstein.

Unter-Secunda.

I. Ordnung.

Theodor Mende aus Seidenberg.
Heinrich Hieronymus aus Eckartsberga.
Otto Korschewitz aus Bachra.
Wilhelm Telle aus Kösen. Fam. comm. II.
Bernhard von Hagen aus Langensalza.
Ernst Reich aus Burg.
Paul von Bauern aus Graudenz.
Heinrich von Köhring aus Wernigerode.
Wilhelm Hübner aus Sundhausen.
Georg Quehl aus Erfurt.
Gustav Gemberg aus Meyenburg.
Ernst Neidhardt I. aus Teuditz.
Oscar Roick aus Pforta.
Carl Sichting I. aus Borken.
Hans von Scheel aus Potsdam.
Hermann Ehrenberg aus Berlin.
Otto Köhler aus Lohburg.
Gustav Knauff aus Rathenow.
Friedrich Müller III. aus Güterglück.

II. Ordnung.

Richard Kraft II. aus Lossa.
Eugen Bormann I. aus Hilchenbach.

Julius Steinhart aus Schlieben.
Albrecht Kaiser aus Herzberg.
Ernst Göhring II. aus Mücheln.
Hermann Thränhart aus Pforta.
Karl Peter aus Meiningen. Extr. Rector Dr. Peter.
Hugo Frasch aus Langensalza.
Richard Braune I. aus Naumburg.
Felix Granier aus Grüneberg.
Gustav Blau aus Wolframshausen.
Moritz Graf von Hohenthal aus Hohenpriessnitz. Extraneer Prof. Buddensieg.
Hermann Döhlert I. aus Spielberg.
Adolph Langerhanns aus Kösen.
Theodor Verdens aus Quedlinburg.

Ober-Tertia.

I. Ordnung.

Hermann Schütze aus Magdeburg.
Gustav Gottsched aus Wernigerode.
Georg von Strampf aus Wahlstadt.
Franz Rasch aus Düben.
Alexis Braune II. aus Naumburg.
Hermann Lüttich aus Sangerhausen.
Heinrich Schwartz aus Hilchenbach.
Justus Hoene I. aus Naugard.
Johannes Buch aus Prettin.
Otto Adam aus Berlin.
Carl Eichholtz aus Ravicz.
Daniel Tiedemann aus Bremen. Extr. Dr. Heine.
Otto Flügel aus Lützen.
Emil Hartung aus Langensalza.
Arnold Stüler aus Berlin.
Bruno Mittelstrass aus Kalbe.
Robert Schröer aus Waldstedt.
August Meyer aus Sangerhausen.
Otto Walter aus Mertendorf.
Oswald Maiss aus Oppeln.
Ludwig Rathmann III. aus Wernigerode.
Hermann Keil aus Grumbach.
Karl von Römer aus Janisrode.
Eduard Deutelmoser aus Iserlohn.
Carl Müller IV. aus Klein-Wusterwitz.
Paul Krüger aus Halberstadt. Extraneer Prof. Buddensieg.

II. Ordnung.

Maximilian Reuter II. aus München.
Johannes Hentschel aus Weissenfels.
Eduard Amen aus Prenzlau.
Ernst Wickenhagen aus Leubingen.
Otto Schulze aus Neisse.
Richard von Schäffer aus Wehlau.
Eduard Worgitzky aus Sarmund.
Albert Tech aus Greifenberg.
Feodor von Borcke aus Potsdam. Extraneer Prof. Koberstein.
Paul Paschke aus Triebel.
Robert Kambly aus Mühlberg.
Moritz Haffer aus Gumbinnen.
Emil Wettengel aus Naumburg.
Gustav Schunke aus Sangerhausen.
Paul Tiedke aus Berlin.

Unter-Tertia.

Otto Scheibe aus Naumburg.
Gustav Dickel aus Berleburg.
Wilhelm Schleussner II. aus Kemberg.
Albert Schröder aus Sangerhausen. Extraneer Prof. Buddensieg.
Otto Sichting II. aus Borken.
Robert Rottorf aus Sömmerda.
Gustav Sänger aus Naumburg.
Bruno Riesel aus Radewell bei Halle.
Heinrich Böhme II. aus Kirchhain.
Theodor Friese aus Posen.
Friedrich Mondschein aus Kindelbrück.
Otto Höne II. aus Naugard.
Johannes Steuer aus Reppen.
Carl Waldhauer aus Sömmerda.
Johannes Weineck aus Cölleda.
Albert Wölfer aus Zahna.
Otto Breithaupt aus Finsterwalde.
Arthur von Henning aus Ringleben bei Gebesee.
Eduard Schmidt II. aus Bitterfeld.
Johannes Portius aus Reetz.
Curt Hirsemann aus Weissenfels.
Kuno von Riedenau aus Ortrand.
Paul Krug aus Berlin.
Otto Uhlig aus Halle.
Gustav Wetzel II. aus Schillingstedt.
Georg Sombart aus Genthin.
Wilhelm Trümpelmann II. aus Ilsenburg.
August Wieblitz aus Blankenheim.
Johannes Neidhardt II. aus Teuditz.
Heinrich Wendt aus Minden.
Rudolph Purper aus Baumholder.
Moritz Niese aus Pforta.
Robert Otto II. aus Erfurt.
Theodor Sauerteig aus Wernburg.
Ludolph Penkert aus Sangerhausen.
Walter Bormann II. aus Potsdam.
Emil Neidhardt III. aus Teuditz.
Bernhard Döhlert II. aus Spielberg.
Richard Schwabe aus Cölleda.

E. Uebersicht über die Vertheilung der Lehrstunden.

Lehrer.	I a. b.	II a	II b	III a	III b	Summa.
Rector Dr. **Peter**	2 Lat. 8 Lat.					10 St.
Professor und geistl. Insp. **Niese**	2 Rel.	2 Rel.		2 Rel.		6 St.
Prof. Dr. **Koberstein**	2 1} 2} Deutsch 2 Franz.	2 Deutsch 2 Franz.	2 Deutsch			13 St.
Prof. Dr. **Steinhart**	6 Griech.	8 Lat.				14 St.
Prof. Dr. **Jacobi**		4 Math.	4 Math.		a b 4 4 Math.	16 St.
Prof. **Keil**	8 Lat.		3 Lat.	3 Lat.		14 St.
Prof. **Buddensieg**	2 Hebr.	2 Hebr.	2 Hebr. 2 Rel.		2 Rel.	10 St.
Prof. **Buchbinder**	Math. 4 4 2 Phys.			4 Math.	2 Geogr.	16 St.
Prof. Dr. **Corssen**	3 Gesch.	3 Gesch. 2 Lat.	8 Lat.			16 St.
Adj. Dr. **Purmann**		6 Griech.		8 Lat. 3 Deutsch		17 St.
Adj. Dr. **Heine**			6 Griech. 3 Gesch.		3 Lat. 3 Deutsch 3 Gesch.	18 St.
Adj. Dr. **Passow**			2 Franz.	6 Griech. 3 Gesch.	8 Lat.	19 St.
Adj. Dr. **Euler**		2 Franz.	2 Franz.		6 Griech.	10 St.*
Musikdirector **Seiffert**	G e s a n g					6 St.
Zeichenlehrer **Hossfeld**	Zeichnen in 3 Klassen					6 St.
Schreiblehrer **Karges**	Schreiben in 4 Abtheilungen					4 St.
					Summa	195 St.**

* Dazu noch 6 St. Turnen.
** Dazu noch die 6 St. Turnen und 12 St. Tanzen; Gesammtzahl der St. sonach 213.

F. Allgemeiner Lehrplan; Schüler; Abiturienten.

Allgemeiner Lehrplan.

Fächer.	Classen und Stunden. I (a b)	II sup.	II inf.	III sup.	III inf. (a b)	Summa.
Lateinisch	2 / 8 8	10	11	11	11	61
Griechisch	6	6	6	6	6	30
Deutsch	1 / 2 2	2	2	3	3	15
Hebräisch	2	2	2	—	—	6
Religion	2	2	2	2	2	10
Mathematik	4 4	4	4	4	4 4	28
Physik	2	—	—	—	—	2
Geographie / *Geschichte*	3	3	3	3	2 / 3	17
Französisch	2	2 2	2 2	—	—	10
Singen	1 1	1	1	1	1	6
Zeichnen	—	—	—	—	—	6
Schönschreiben	—	—	—	1 1	1 1	4
Turnen	—	—	—	—	—	6
Tanzen	—	—	—	—	—	12
Summa	35	32	33	31	33	213

Schüler.

In	waren nach Ost. 56.	wurden entl. od. versetzt	aufgenommen wurden	waren nach Ost. 57.
I	42	23	23	42
II a.	32	31	28	29
II b.	36	34	32	34
III a.	35	32	38	41
III b.	44	41	36	39
Sa.	189	161	157	185

Abiturienten.

Es sind entlassen:		studieren wo?		studieren was?	
Mich.	9	Halle	10	Theologie	10
Ostern	13	Berlin	5	Theol. und oriental. Sprachen	1
		Breslau	1	Jura	3
		Jena	1	Jura u. Cam.	2
		Leipzig	1	Gesch. und Philol.	2
		Unbest.	4	Baufach	1
				Bergwissenschaft	1
				Schauspiel.	1
				Unbest.	1
Summa	22	Summa	22	Summa	22

V. Stand des Lehrapparats.

Ausser den im Laufe des Jahres aus den etatsmässigen Mitteln angeschafften Werken erhielt die Schulbibliothek theils von Seiten der hohen vorgesetzten Behörden, theils von einigen Gönnern und Freunden der Anstalt und von ehemaligen dankbaren Zöglingen derselben während des verflossenen Schuljahres folgende Geschenke:

Vom Königlichen Ministerium der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten: 1) Zeitschrift für deutsches Alterthum von M. Haupt. Bd. X. H. 3. Bd. XI. H. 1. 2) Alterthümer und Kunstdenkmale des erlauchten Hauses Hohenzollern von R. Freiherrn von Stillfried. Neue Folge. L. 1—4. Berlin 1855—56. 3) Zeichnungen von Asmus Jacob Carstens in der Grosherzogl. Kunstsammlung zu Weimar von W. Müller. H. 1—6. 4) Karls IV. Landbuch der Mark Brandenburg. E. Fidicin. Berlin 1856. 5) Die schönsten Ornamente und merkwürdigsten Gemälde aus Pompeji, Herkulanum und Stabiä F. 3. H. 7. 6) Plinius Naturgeschichte übersetzt von Ch. Fr. Strack, überarbeitet von M. E. D. L. Strack. 3 Thle. Bremen 1853—55. 7) Denkmäler aus Aegypten und Aethiopien von C. R. Lepsius. Liefer. 63—75.

Vom Königl. Provinzialschulcollegium: 8) Catalogue of the Officers and students of Harvard University ed. 2. Cambridge 1854—55. 9) Catalogue of the officers and students in Yale college. New Haven 1854—55. 10) Annual Report of the trustees of the State Normal School. New Haven. 1854.

Von der Königlichen Universitätssternwarte zu Königsberg: 11) Astronomische Beobachtungen. Abth. 28. 1856.

Vom Herrn Professor Dr. *Ch. G. Ehrenberg:* 12) Mikrogeologie. Fortsetzung. Leipzig 1856. 13) Ueber den Grünsand. Berl. 1856. 14) Vom Herrn Prof. Dr. *A. Jacobi* aus der Bibliothek des Herrn Prof. *C. F. A. Jacobi:* Dialogo di Galileo Galilei — sopra i due massimi sistemi del mondo Tolemaico et Copernicano. Florenza 1632 (sehr seltene Ausgabe). 15) Vom Herrn Vice-Canzler Dr. *Blau:* Beiträge zur Phönizischen Münzkunde. Leipzig 1852. 1855. 16) Vom Herrn Director Dr. *Funkhänel:* Ueber das geistliche Spiel von den zehn Jungfrauen. Weimar 1855. 17) Vom Herrn Prof. Dr. *Floto:* Kaiser Heinrich IV. Bd. 2. Berl. 1856. 18) Vom Herrn Buchhändler *Vogel:* Bibliographisches Jahrbuch für den deutschen Buch-, Kunst- und Landkartenhandel. Jahrg. 4. 1856. Bd. 1. 2. 19) Zeitschrift der deutschen Morgenländischen Gesellschaft. Band X. H. 3. 4. 1856. 20) Vom Herrn Prof. Dr. *Steinhart:* Platons sämmtliche Werke, übersetzt von H. Müller, mit Einleitungen von K. Steinhart. Bd. 5. 1855. Bd. 6. 1857. Vom Herrn Prof. *J. S. C. Schweigger:* 21) Jahrbücher der Physik und Chemie von 1825—1828. 22) Einleitung in die Mythologie auf dem Standpuncte der Naturwissenschaft. Halle 1836. 23) Ueber eine cista Mystica. Wien 1855. 24) Denkschrift zur Säcularfeier der Universität Erlangen. 1843. Halle. 25) Bruchstücke aus dem Leben A. F. Schweiggers. Halle 1830. 26) Oratio in Academia Halensi aedium academicarum inaugurandarum causa habita. 1834. 27) Geschichte des Elektromagnetismus. Halle 1856. 28) Vom Extraneer *Gülschow* aus Petersburg: Die Altdeutschen Handschriften der Kaiserlichen Bibliothek zu St. Petersburg von R. Minzloff. 1853. 29) Vom Herrn Dr. *A. Imhof:* C. Flavius Domitianus. Halle 1857.

Für alle obengenannten Beiträge und Geschenke statten wir den Hohen vorgesetzten Behörden sowie den übrigen geehrten Gönnern und Gebern von Seiten der Anstalt unsern ehrerbietigen und verbindlichsten Dank ab.

VI. Ordnung der Schulfeier.

Das Stiftungsfest unserer Schule wird in diesem Jahre statt am 21. Mai wegen des auf diesen Tag fallenden Himmelfahrtsfestes am 22. Mai begangen werden.

An diesem Tage begeben sich früh 8 Uhr Lehrer und Schüler zunächst in die Kirche, wo feierlicher Gottesdienst gehalten wird.

Hierauf folgt von 10 Uhr an ein Declamir- und Redeactus im Turnsaale. Dabei werden declamiren:

Aus Unter-Tertia: *Johannes Steuer* aus Reppen: Schwabenstreiche von Uhland; *Theodor Friese* aus Posen: die drei Gefährten von Rückert.

Aus Ober-Tertia: *Georg von Strampf* aus Wahlstadt: das Mahl in Heidelberg von G. Schwab; *Arnold Stüler* aus Berlin: Barbarossas erstes Erwachen von Freiligrath.

Aus Unter-Secunda: *Hans von Scheel* aus Potsdam: die Frankenfurth, eignes Gedicht.

Aus Ober-Secunda werden ihre eignen poetischen Versuche vortragen: *Otto Liebmann* aus Löwenberg: Nixenspuk; *Eugen Schöppenthau* aus Jauer: der letzte Ritter von Altenahr; *Karl Wolff* aus Langensalza: Gelimer und Belisar; *Wilhelm von Kirchbach* aus Friedland: die Trauung auf Seeland. Aus derselben Klasse wird *Richard Reuter* aus München in lateinischer Sprache eine Laudatio Schwerini in pugna Pragensi ante centum annos occisi vortragen.

Aus Prima wird *August Trümpelmann* aus Ilsenburg in einer deutschen Rede über die Frage handeln: Worin zeigen sich Walther von der Vogelweide und Göthe als Lyriker verwandt, und worin unterscheiden sie sich von einander? *Emil Otto* aus Mansfeld wird in lateinischen Hexametern das Thema: Tellus cometae impulsu peritura, und *Arthur Auwers* aus Göttingen in lateinischer Rede das Thema: Quantum ludi Olympii valuerint ad Graecorum ingenia et instituta conformanda, behandeln.

Zuletzt wird der Rector an diejenigen Schüler, welche sich durch Fleiss und Wohlverhalten in vorzüglichem Maasse empfohlen haben, Prämienbücher vertheilen und die Feierlichkeit mit einem Gebet beschliessen.

Zu dieser Feier beehren wir uns, alle Gönner und Freunde der Anstalt, insbesondere die sämmtlichen Beamten derselben ehrerbietigst und ergebenst einzuladen.

Der Rector der Königl. Landesschule Pforta

Dr. C. Peter.